Graphical analysis of solutions in bankruptcy problems for two or three agents

Ricardo Díaz Estrada
Departamento de Matemáticas y Física
Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA)
ricardo.diaz.eda@gmail.com

Julio César Macías Ponce
Departamento de Matemáticas y Física
Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA)
jlmacias@correo.uaa.mx

Abstract

In the area of resource management, the problem of resource allocation among a set of agents appears very frequently, when the demand of the agents exceeds the available resource, we have a bankruptcy problem. In this paper we illustrate geometrically the essence of the different allocation rules recognized in the literature. We will restrict the problem involving two or three agents. Nevertheless the ideas that we present are susceptible to be generalized in a context of more than three agents and thus understand the basic idea of fairness -perhaps justice- that each solution in the literature pursues.

Keywords: Bankruptcy problems, Bankruptcy games, Graphical method.

MSC Subject classifications: 91B18.

1. Introducción

En las ciencias administrativas aparecen con frecuencia los problemas de reparto de bienes o recursos entre un conjunto de agentes. Los agentes demandan -cada uno- una cierta cantidad pero el recurso disponible es limitado. A un problema de reparto donde la demanda de los agentes supera el recurso disponible se le llama problema de bancarrota.

En la literatura aparecen diversas soluciones para este problema, algunas se abordan en el contexto de juegos cooperativos (Guerrero Casas, Hinojosa Ramos y Sánchez Sánchez, 2006). En este trabajo ilustramos de manera geométrica cada una de estas para los casos de dos y tres agentes. Aunque también describimos de manera analítica las soluciones para n agentes, consideramos que la interpretación gráfica identificará la caracteristica -quizá de justicia- que involucra cada solución.

Formalmente diremos que un problema de bancarrota para L agentes (los cuales llamaremos jugadores) se define como una pareja (d, E) donde d es un vector de números reales positivos de dimensión L, tal que para cada $i \in \{1, \dots, L\}$, el componente d_i denota la demanda del jugador i y E es un número real positivo que indica la cantidad de recurso disponible, además $D := \sum_{i=1}^{L} d_i > E$.

Una solución al problema de bancarrota es una función -regla de reparto- f que a cada pareja (d, E) le asocia un vector $f(d, E) = (f_1, \dots, f_L)$ tal que f_i es un número real no negativo e indica la cantidad que la regla de reparto f asigna al jugador i, además $\sum_{i=1}^{L} f_i = E$.

La organización del trabajo es como sigue: En la sección 2 se describen las principales reglas de reparto que aparecen en la literatura, la sección 3 aborda el problema de reparto bipersonal, las interpretaciones geométricas en este caso, son muy naturales mientras que en la sección 4, se explican detalladamente las interpretaciones geométricas –para cada regla– del reparto tripersonal y finalmente aparece la sección de referencias bibliográficas.

2. Antecedentes

En Guerrero Casas, Hinojosa Ramos y Sánchez Sánchez (2006) podemos encontrar las reglas de reparto más conocidas en la literatura, mismas que a continuación mostramos:

- Igualitaria:
$$f_i = \frac{E}{L}.$$
- Proporcional:
$$f_i = E \cdot \frac{d_i}{D}.$$
- Ganancia igualitaria:
$$f_i = \min\{d_i, \lambda\},$$
donde λ incrementa desde cero hasta conseguir $\sum_{i=1}^{L} f_i = E$.
- Pérdida igualitaria:
$$f_i = \max\{d_i - \lambda, 0\},$$
donde λ incrementa desde cero hasta conseguir $\sum_{i=1}^{L} f_i = E$.
- Bien disputado:
$$f_i = \begin{cases} GI_i(\frac{1}{2}d, E) & si\ \frac{1}{2}D \geq E, \\ d_i - GI_i(\frac{1}{2}d, D - E) & si\ \frac{1}{2}D < E, \end{cases}$$
donde GI_i son los bienes asignados al jugador i mediante ganancia igualitaria.

- Realización recursiva:

$$f_i = \frac{1}{L!} \sum_{\pi \in \Pi} x_{i(\pi)},$$

donde π es una permutación de L elementos, Π todas las posibles permutaciones y $x_{i(\pi)}$ la cantidad de recurso que se le otorga al jugador i en la permutación π. Los bienes se otorgan considerando que los jugadores llegan según el orden π y conforme llegan, a cada uno, se le otorga lo máximo posible (sin sobrepasar su demanda ni lo que queda disponible) después de que se les asigne a los que llegaron antes según el orden. Así, se promedian las asignaciones correspondientes a todas los órdenes (permutaciones).

- Ajuste proporcional:

$$f_i = m_i + E' \frac{d'_i}{\sum_{j=1}^{L} d'_j},$$

donde m_i es el mínimo derecho del jugador i, y es lo que obtendría, considerando que se satisfacen todas las otras demandas dejando al final la del jugador i. Se otorga a todos los jugadores sus mínimos derechos y se actualizan los valores como: $E' = E - \sum_{i=1}^{L} m_i$ y $d'_i = \text{mín}\{E', d_i - m_i\}$.

Ejemplo: Un padre de familia desea repartir 700 unidades monetarias entre sus cuatro hijos, los cuales demandan 625, 34, 230 y 92 respectivamente. Las asignaciones obtenidas con las reglas de reparto se muestran en las Tablas 1 y 2.

Demanda	Igualitaria	Proporcional	Ganancia igualitaria	Pérdida igualitaria
625	175	445.973	min(625,344)=344	max(625-82.34,0)=542.66
34	175	24.261	min(34,344)=34	max(34-82.34,0)=0
230	175	164.118	min(230,344)=230	max(175-82.34,0)=92.66
92	175	65.647	min(92,344)=92	max(92-82.34,0)=9.66

Tab. 1: Solucion Igualitaria, Proporcional, G. igualitaria y P. igualitaria para (625,34,230,92;700).

Demanda	Bien disputado	Realización recursiva	Ajuste proporcional
625	625-min(312.5,109)=516	Promedio=499.83	344+356*281/637=501.04
34	34-min(17,109)=17	Promedio=19.83	0+356*34/637=19
230	230-min(115,109)=121	Promedio=124.67	0+356*230/637=128.54
92	92-min(46,109)=46	Promedio=55.67	0+356*92/637=51.42

Tab. 2: Solucion B. disputado, R. recursiva y A. proporcional para (625,34,230,92;700).

Notese que $\lambda = 344$ *para Ganancia igualitaria, mientras que* $\lambda = 82.34$ *para Perdida igualitaria.*

3. Solución gráfica para dos jugadores

Existen trabajos que describen de manera clara las reglas de reparto para n jugadores Hinojosa Ramos (2014), sin embargo, en este trabajo mostraremos un esquema que permite identificar los distintos tipos de reglas desde la perspectiva geométrica -el método gráfico de las reglas de reparto-. Abordamos

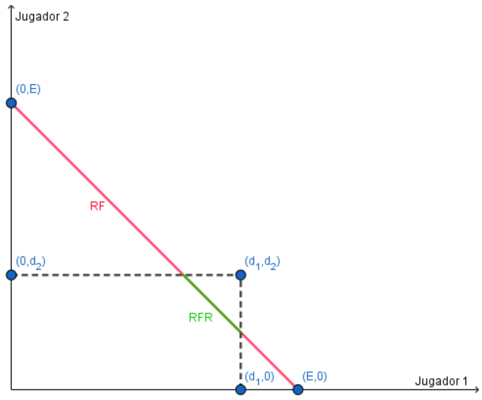

Fig. 1: Representación gráfica de un problema de bancarrota con dos jugadores.

primero el caso donde participan dos jugadores, $d = (d_1; d_2) \in \mathbb{R}^2_{>0}$ y el recurso disponible $E \in \mathbb{R}_{>0}$ donde $d_1 + d_2 > E$.

En el plano bidimensional acotado por los ejes x y y representaremos la cantidad de recurso que la regla de reparto asigna a los jugadores 1 y 2 respectivamente. Ya hemos establecido que cualquier solución asigna cantidades no negativas, así las gráficas las situaremos en el primer cuadrante.

Procedemos entonces a fijar en el plano el punto que satisface la demanda de ambos jugadores: $d = (d_1; d_2)$; después graficamos el conjunto de puntos factibles (denotado por RF), que equivale a restringir la recta $x + y = E$, en el primer cuadrante.

Adicionalmente, identificaremos un subconjunto de RF dado por: $0 \leq x \leq d_1$ y $0 \leq y \leq d_2$ (denotado por RFR), y representa al conjunto de repartos -asignaciones- donde no se le otorga a cada jugador una cantidad negativa ni más de lo que demanda. La representacion se muestra en la Figura 1.

3.1. Igualitaria

Los puntos que asignan la misma cantidad de recurso a ambos jugadores son los que satisfacen la ecuación $x = y$ -la recta identidad- la intersección con el conjunto RF corresponde a la solución igualitaria como se muestra en la Figura. 2.

3.2. Proporcional

El punto que reparte de forma proporcional a las demandas es el único punto que es de manera simultánea, combinación convexa de $(0; 0)$ con $(d_1; d_2)$ y de $(d_1; 0)$ con $(0; d_2)$ como se muestra en la Figura 3.

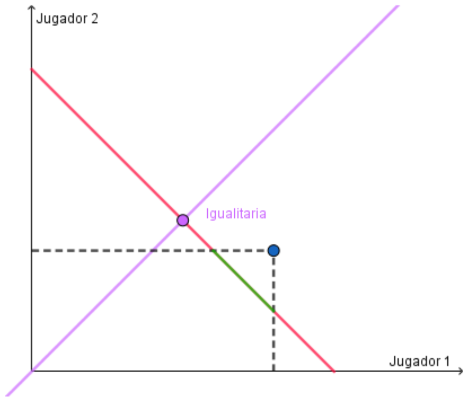

Fig. 2: Gráfica de la regla igualitaria.

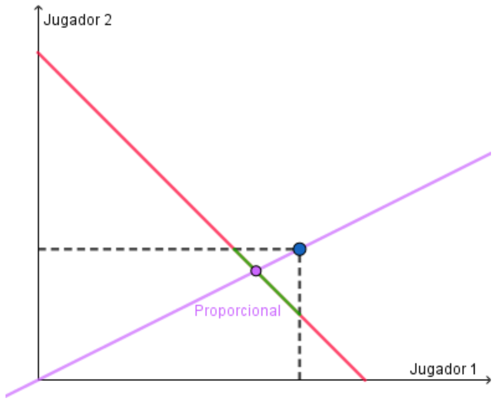

Fig. 3: Gráfica de la regla proporcional.

3.3. Ganancia igualitaria

Partiendo de la solución igualitaria, tenemos dos casos, si el punto se encuentra en el conjunto RFR este será el de ganancia igualitaria, en caso contrario la solución será el punto más cercano de RFR a dicho punto, ver Figura 4.

3.4. Pérdida igualitaria

Los puntos que otorgan la misma cantidad de diferencia a las demandas de ambos jugadores son los que satisfacen la ecuación $d_1 \quad x = d_2 \quad y$, esta región es representada por una recta de pendiente 1 que pasa por el punto d, por lo que ahora encontramos el punto que intersecta a RF. Si el punto está en RFR dicho punto es la solución de pérdida igualitaria, en caso contrario se encuentra el punto más cercano a RFR, como se muestra en la Figura 5.

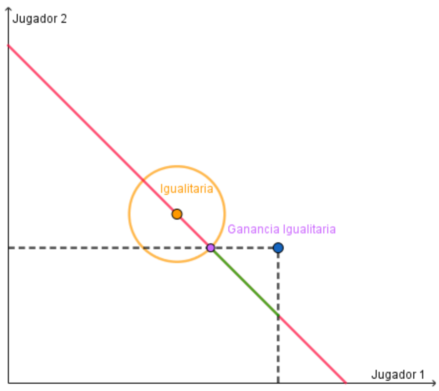

Fig. 4: Gráfica de la regla de ganancia igualitaria.

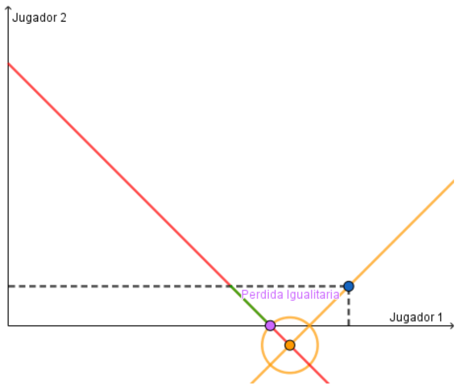

Fig. 5: Gráfica de la regla de pérdida igualitaria.

3.5. Bien disputado

Para esta regla primero graficamos el punto $\frac{1}{2}d$. Si este punto se encuentra en la región dada por $x+y \geq E$ implica que $\frac{1}{2}D \geq E$ y bastará con encontrar la solución de ganancia igualitaria considerando $\frac{1}{2}d$ como demanda.

El caso interesante se da cuando $\frac{1}{2}d$ se encuentra en la región determinada por $x+y<E$ o equivalentemente $\frac{1}{2}D<E$. Cuando esto ocurre se debe considerar un "sistema cartesiano alterno" con origen en el punto d y considerando los ejes de cada jugador con orientación contraria (crecen hacia el lado contrario), sin embargo, la región RF seguirá siendo la misma de la gráfica original. Se procede ahora a encontrar la ganancia igualitaria considerando $\frac{1}{2}d$ como demanda (ver Figura 6).

La justificación de los argumentos anteriores se basa en que si $d_0=(x_0;y_0)$ es el punto en RF con su primer coordenada igual a d_1 entonces se tiene que $d_1+y_0=E$, notemos que la distancia de d a d_0 es $\sqrt{(d_1-d_1)^2+(d_2-y_0)^2}=d_2-y_0=d_2-y_0+d_1-d_1=(d_1+d_2)-(d_1+y_0)=D-E$, similarmente se puede obtener que la distancia de d al punto d_0' ubicado en RF con segunda coordenada igual a d_2 es $D-E$.

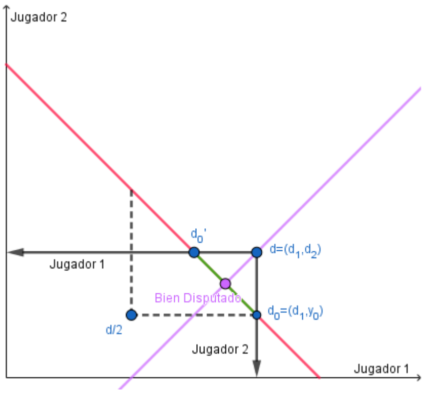

Fig. 6: Gráfica de la regla del bien disputado.

Por lo tanto, en el sistema alterno, se está repartiendo la cantidad de $D \quad E$, luego como el punto $\frac{1}{2}d$ está ubicado en la gráfica alterna, basta con aplicarle la ganancia igualitaria y esta cantidad para la gráfica original se estará restando al punto d y por lo tanto será la solución del bien disputado para la gráfica original.

3.6. Realización recursiva

En este caso sólo hay dos permutaciones (dos maneras de llegada de los agentes) los cuales corresponden a los extremos de RFR, luego la solución es el punto medio de estos dos puntos como se muestra en la Figura 7.

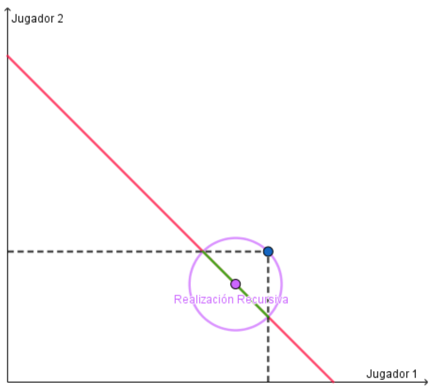

Fig. 7: Gráfica de la regla de realización recursiva.

3.7. Ajuste proporcional

Para el caso de dos jugadores, el mínimo derecho de cualquier jugador se da cuando el otro jugador es el primero en recibir su recurso, es decir nuevamente los extremos de RFR, por lo que al entregar los mínimos derechos el punto m será ubicado en la esquina inferior izquierda del cuadrado que tiene como diagonal la región RFR, ver Figura 8.

Consideramos nuevamente un "sistema cartesiano alterno" con origen en m y la misma región RF. El punto de demandas actualizado se ubicará en el vértice opuesto del cuadrado con diagonal la región RFR, por lo que al aplicar la regla proporcional en la gráfica alterna también se llegará al punto medio de RFR.

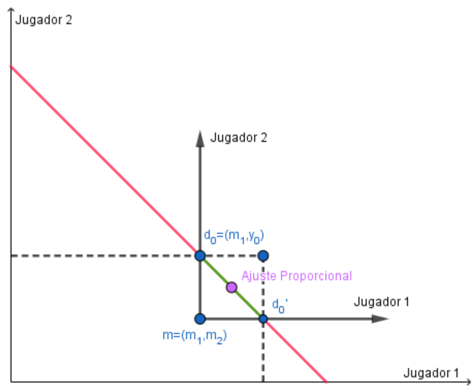

Fig. 8: Gráfica de la regla de ajuste proporcional.

Veamos ahora la justificación: sea $d_0 = (x_0; y_0)$ el punto en RF con su primer coordenada igual a m_1 por lo que cumple que $m_1 + y_0 = E$, notemos que la distancia de m a d_0 es $\sqrt{(m_1 - m_1)^2 + (y_0 - m_2)^2} = y_0 - m_2 = y_0 - m_2 + m_1 - m_1 = (m_1 + y_0) - (m_1 + m_2) = E - (m_1 + m_2)$, similarmente se puede obtener que la distancia de m al punto d_0' en RF con segunda coordenada igual a m_2 es $E - (m_1 + m_2)$.

Por lo tanto, el sistema alterno está repartiendo la cantidad de $E - (m_1 + m_2)$ que es el caso particular para dos jugadores de $E - (\sum_{i=1}^{L} m_i)$. Ahora para el caso de dos jugadores m_1 es lo que obtiene el jugador 1 cuando el jugador 2 es el primero en recibir su recurso, por lo que podemos obtener que $m_1 \geq E - d_2$, la igualdad se da cuando el lado derecho es positivo, y la desigualdad cuando el lado derecho es negativo y $m_1 = 0$.

Haciendo $d_2 - m_2 - E' = d_2 - m_2 - E + m_1 + m_2 = d_2 + m_1 - E \geq d_2 + E - d_2 - E = 0$ obtenemos que $d_2 - m_2 - E' \geq 0$ por lo que $d_2 - m_2 \geq E'$, de manera similar $d_1 - m_1 \geq E'$, por lo que $d_i' = \text{mín}\{E'; d_i - m_i\} = E'$, de esta manera se obtiene que las demandas en el sistema alterno estarán representadas por el punto del vértice opuesto al cuadrado.

3.8. Soluciones equivalentes

La representación gráfica nos sugiere argumentar la justificación de una proposición que señala la equivalencia de tres reglas de reparto cuando se tienen dos jugadores.

Teorema: *Para un problema de bancarrota con dos jugadores, las soluciones proporcionadas por el bien disputado, realizacion recursiva y ajuste proporcional son equivalentes.*

Demostración: Ya que la solución proporcionada por el ajuste proporcional siempre encuentra el centro del cuadrado con RFR como diagonal, entonces esta solución es equivalente a la realización recursiva, ahora veremos que el bien disputado también proporciona la misma solución (centro de la región RFR).

Primero consideremos el caso $\frac{1}{2}D \quad E$, nuevamente podemos dividirlo en dos subcasos, cuando el conjunto RFR con demanda $\frac{1}{2}d$ contiene el punto de solución igualitaria y cuando no lo contiene. En el primer subcaso se tiene que $\frac{1}{2}d_1 \quad \frac{1}{2}E$ y $\frac{1}{2}d_2 \quad \frac{1}{2}E$ por lo que el conjunto RFR con respecto a la demanda original será RF intersectada con el primer cuadrante, y ya que la solución igualitaria coincidirá con la del bien disputado, esta será el centro de la región RFR.

Para el segundo subcaso, se tiene que para algún i se verifica que $\frac{1}{2}d_i < \frac{1}{2}E$, sin pérdida de generalidad supondremos que $\frac{1}{2}d_2 < \frac{1}{2}E$, por lo que la solución de ganancia igualitaria será el extremo izquierdo de la región RFR la cual satisface que su segunda componente es $\frac{1}{2}d_2$, haciendo que la solución final corresponda al punto medio, como se muestra en la Figura 9.

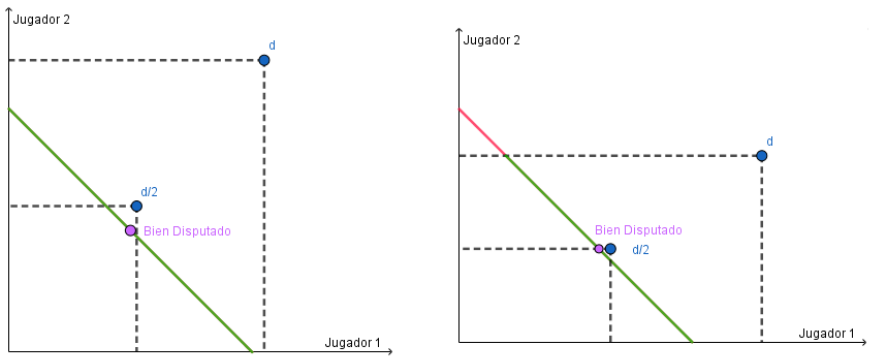

Fig. 9: Subcasos del caso $\frac{1}{2}D \quad E$.

Ahora veamos el caso $\frac{1}{2}D < E$, nuevamente podemos dividirlo en dos subcasos, cuando la region RFR no intersecta los ejes originales y cuando si lo hace. Si no lo hace, se verifica que $d_1 \quad E$ y $d_2 \quad E$, equivalentemente $\quad d_1 \quad E$ y $\quad d_2 \quad E$, sumando $D = d_1 + d_2$ a ambas ecuaciones obtenemos $d_1 \quad D \quad E$ y $d_2 \quad D \quad E$ o equivalentemente $\frac{1}{2}d_1 \quad \frac{1}{2}(D \quad E)$ y $\frac{1}{2}d_2 \quad \frac{1}{2}(D \quad E)$, donde podemos observar que las demandas para el segundo sistema $\frac{1}{2}d$ son mayores a la mitad de la cantidad a repartir, por lo que la ganancia igualitaria repartirá la misma cantidad a ambos, llegando así al centro de la región RFR.

Para el subcaso donde RFR intersecta algún eje tenemos sin pérdida de generalidad que $d_2 > E$ y $d_1 < E$, siguiendo el mismo procedimiento para la primera ecuación, llegamos a $\frac{1}{2}d_2 < \frac{1}{2}(D - E)$, donde podemos observar que la demanda del segundo jugador para el segundo sistema, $\frac{1}{2}d_2$ es menor a la mitad de la cantidad a repartir, por lo que la ganancia igualitaria repartirá a ese jugador toda su demanda, llegando a la solución la cual satisface que su segunda componente es $\frac{1}{2}d_2$, haciendo que la solución final corresponda al punto medio nuevamente, como se muestra en la Figura 10.

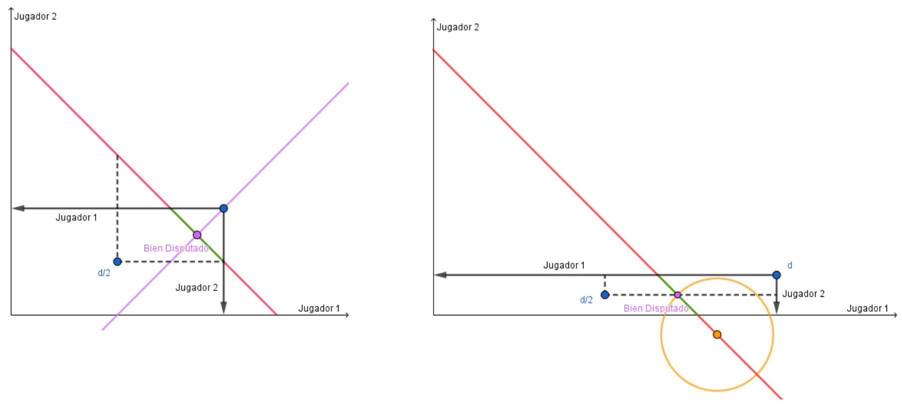

Fig. 10: Subcasos del caso $\frac{1}{2}D < E$.

O'Neill (1982) define el juego cooperativo de bancarrota (para n jugadores), y así, en la literatura se puede encontrar una relación entre algunas de las reglas de reparto y las soluciones de juegos cooperativos (aplicadas al juego de bancarrota): la regla del bien disputado corresponde al nucleolo, la regla de realización recursiva equivale al valor de Shapley y la regla de ajuste proporcional es el τ-valor (Guerrero Casas, Hinojosa Ramos y Sánchez Sánchez, 2006). En el caso de juegos bipersonales de bancarrota tenemos el siguiente resultado que indica que las tres soluciones de teoría de juegos cooperativos que hemos citado coinciden.

Corolario: *Para el juego cooperativo con dos jugadores inducido por un problema de bancarrota de dos jugadores, el nucleolo, el valor de Shapley y el τ-valor son equivalentes.*

4. Solución gráfica para tres jugadores

Ahora abordaremos el caso con tres jugadores, así, el juego estará descrito con un vector de demandas tridimensional $d = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3_{>0}$ y la cantidad a repartir $E \in \mathbb{R}_{>0}$ donde $d_1+d_2+d_3 > E$.

Para este caso se comienza definiendo un espacio donde los ejes x, y y z corresponderán a la cantidad que recibirá el jugador 1, 2 y 3 respectivamente. Ahora trabajaremos mayormente con el primer octante, pero para facilitar la interpretación de algunas soluciones se necesitará extender la región fuera de este octante.

Así, procedemos a identificar el punto que logra satisfacer las demandas de todos los jugadores, es decir $d = (d_1, d_2, d_3)$; después el conjunto de puntos factibles RF que satisface $x+y+z = E$, esta región es un plano, el cual restringiremos al primer octante salvo que sea necesario extenderlo para encontrar una intersección.

Por último, se resalta el subconjunto de RFR que satisface $0 \leq x \leq d_1$, $0 \leq y \leq d_2$ y $0 \leq z \leq d_3$, nuevamente todas las soluciones eficientes serán representadas con un punto sobre RF o RFR. La representacion se muestra en la Figura 11.

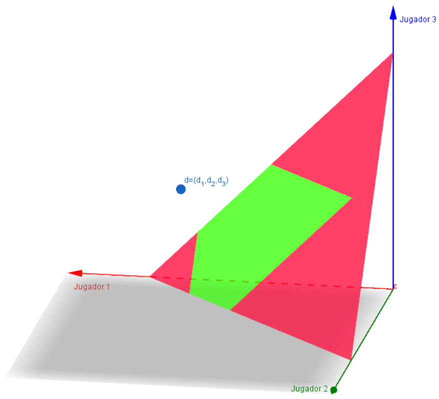

Fig. 11: Representación gráfica de un problema de bancarrota con tres jugadores.

4.1. Igualitaria

Los puntos que otorgan la misma cantidad a todos los jugadores son los que satisfacen la ecuación $x = y = z$, ya que esta región es representada con una recta que pasa por el origen con vector generador $(1; 1; 1)$, basta intersectar dicha recta con el conjunto RF para encontrar la solución igualitaria como se muestra en la Figura 12.

4.2. Proporcional

El punto que reparte proporcional es un múltiplo escalar del vector $(d_1; d_2; d_3)$, así, basta identificar el punto de RF donde intersecta un múltiplo del vector demanda como se muestra en la Figura 13.

4.3. Ganancia igualitaria

Si el punto de la solución igualitaria pertenece a RFR, este será la solución de ganancia igualitaria, en caso contrario se identifica al punto de RFR que este más cerca -de la igualitaria- como se muestra en la Figura 14.

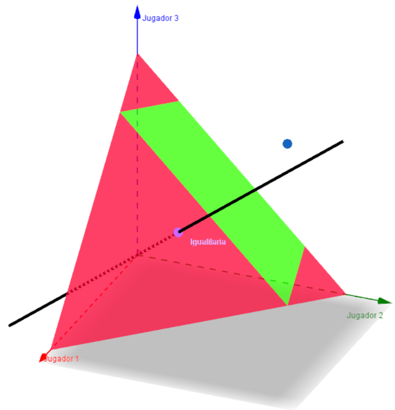

Fig. 12: Gráfica de la regla igualitaria.

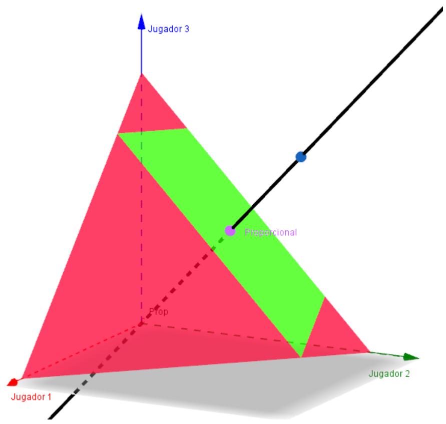

Fig. 13: Gráfica de la regla proporcional.

4.4. Pérdida igualitaria

Los puntos que otorgan la misma cantidad de diferencia a las demandas de ambos jugadores son los que satisfacen la ecuación $d_1 \quad x = d_2 \quad y = d_3 \quad z$, esta región es representada por una recta que pasa por el punto d con vector generador $(1; 1; 1)$, por lo que ahora encontramos el punto que intersecta RF. Si el punto de intersección pertenece a RFR, este será la solución de pérdida igualitaria, en caso contrario se encuentra el punto más cercano a este (sin perder la condición de no negatividad de las asignaciones de recurso), como se muestra en la Figura 15.

4.5. Bien disputado

Se añade el punto $\frac{1}{2}d$, si este nuevo punto se encuentra "por encima" del conjunto RF (caso $\frac{1}{2}D \quad E$) se calcula la ganancia igualitaria sobre este punto, si se tiene que (caso $\frac{1}{2}D < E$) se debe realizar de igual forma la ganancia igualitaria sobre este punto, pero en un sistema alterno (invertido)

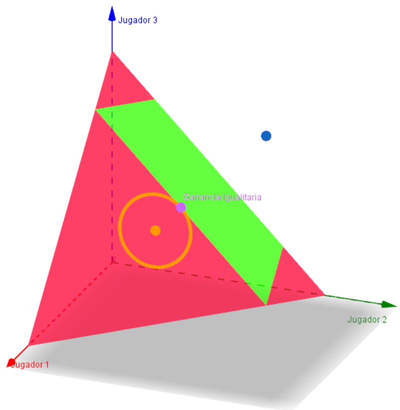

Fig. 14: Gráfica de la regla de ganancia igualitaria.

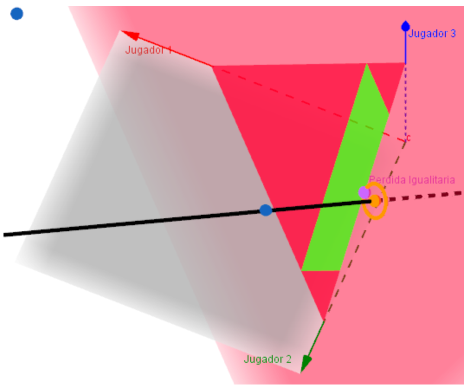

Fig. 15: Gráfica de la regla de pérdida igualitaria.

considerando como origen el punto original d. La justificación del procedimiento es prácticamente la misma para el caso de dos jugadores. Se muestra el proceso en la Figura 16.

4.6. Realización recursiva

Notemos que al no considerar las restricciones de no negatividad La región RFR siempre forma una región con tres vértices (región 1), a su vez al considerar solo la intersección con el primer octante la región RF siempre forma una región con tres vértices (región 2), a estos seis vértices los llamaremos "vértices especiales".

Consideremos la intersección de ambas regiones, cuando algún vértice especial es a su vez vértice de la intersección le asignamos una ponderación de dos, y en caso contrario la ponderación será de uno.

Al tener identificados todos los vértices de la intersección con su respectiva ponderación, se promedian los valores para cada coordenada para obtener la solución como se muestra en la Figura 17.

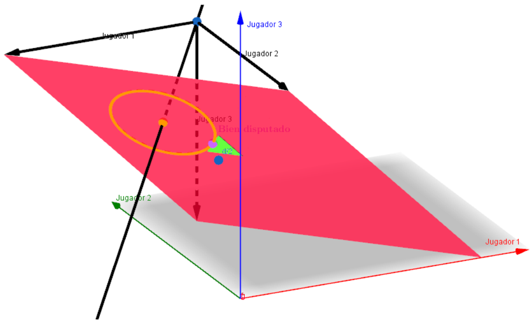

Fig. 16: Gráfica de la regla del bien disputado.

Lamentablemente este algoritmo no tiene una interpretación gráfica sencilla.

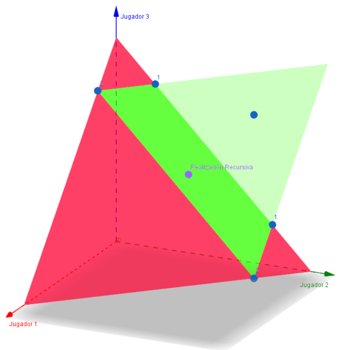

Fig. 17: Gráfica de la regla de realización recursiva.

La justificación del procedimiento antes mencionado es que los vértices de la intersección de ambas regiones representan un órden de satisfacción de demanadas de los tres jugadores (se tienen 6 órdenes). Si un vértice de la intersección es a su vez un vértice de la región 1, indica que la suma de dos demandas es menor a la cantidad a repartir, por lo que existen dos órdenes donde estos dos llegan primero. Y cuando se trata de un vértice de la region 2 indica que una de las demandas sobrepasa la cantidad disponible, por lo que existen dos órdenes donde se le asignaría a este agente todo lo disponible, los demás vértices corresponden a los otros órdenes de llegada.

4.7. Ajuste proporcional

Se obtiene el punto m mediante los valores mínimos que se alcanzan en cada coordenada en la región RFR, después se construye el prisma rectangular con vértice en m que contiene todo el conjunto RFR, luego, para el punto d se tienen dos posibilidades:

Si el punto d está en el prisma rectangular este será la demanda d', en caso contrario el punto d' será el vértice del prisma, opuesto a m, como se aprecia en la Figura 18.

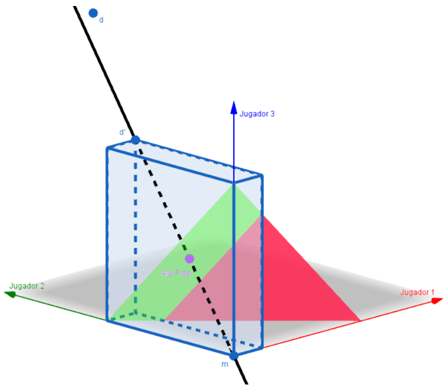

Fig. 18: Gráfica para la regla de ajuste proporcional.

El algoritmo descrito es bastante intuitivo y similar al caso de dos jugadores, solamente debemos notar que para el jugador i tenemos que $d'_i \neq d_i - m_i$ si y sólo si la demanda del jugador i es mayor a la cantidad a repartir E, y en dicho caso al reducir la demanda del jugador i a E se obtiene el vértice del prisma opuesto a m.

4.8. Reglas no equivalentes

A diferencia del caso bidimensional, aquí presentamos un ejemplo donde las reglas asignan soluciones distintas entre si. En particular para el problema de bancarrota $(20; 120; 150; 90)$ las soluciones que presentamos en este trabajo se muestran en la Tabla 3 y su representacion geométrica en la Figura 19.

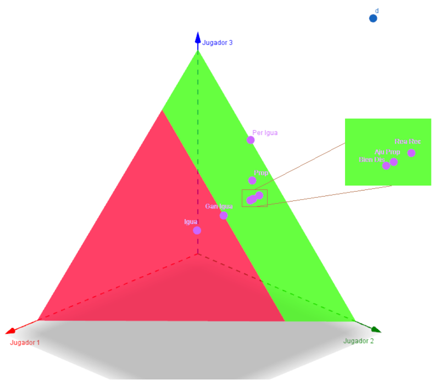

Fig. 19: Gráfica de las respectivas soluciones para el ejemplo propuesto.