



**Boletín
de la Sociedad de Estadística
e Investigación Operativa**

***Probabilistic Valuation of Certain
Unit-linked Contracts***

***Mechanism Design in School Choice:
Some Lessons in a Nutshell***

***Time-Reversion of VARMA Processes
by Polynomial Methods***

***Smallpox and the Memory of
D. Bernoulli. An Early Example of
Applied Statistics***

***Sixto Ríos García, a Keystone in the
Spanish History of Statistics and
Operational Research***



Sociedad de Estadística e
Investigación Operativa

Boletín de la SEIO
Volumen 24, número 3
OCTUBRE 2008

REDACCIÓN

Editor: Jesús López Fidalgo
jesus.lopezfidalgo@uclm.es
Universidad de Castilla-La Mancha

Editores Asociados:

Estadística:
M. del Carmen Pardo Llorente
mcapardo@mat.ucm.es
Universidad Complutense de Madrid

Investigación Operativa:

Ana Meca Martínez
ana.meca@umh.es
Universidad Miguel Hernández de Elche

Estadística Oficial:

Félix Aparicio Pérez
fapape@ine.es
Instituto Nacional de Estadística

Historia y Enseñanza:

Gabriel Ruiz Garzón
gabriel.ruiz@uca.es
Universidad de Cádiz

Editor Técnico:

Fco. Javier Toledo Melero
javier.toledo@umh.es
Universidad Miguel Hernández de Elche

Normas para los envíos de colaboraciones:

Los artículos se enviarán por correo electrónico al editor asociado correspondiente o al editor del Boletín. Se escribirán en estilo *article* de LaTeX. Cada artículo ha de contener el título, el resumen y las palabras clave en inglés sin traducción al castellano. Desde la página Web de la SEIO, www.seio.es, pueden descargarse varios modelos editados con WinEdt y con Scientific WorkPlace, tanto en español como en inglés, que los autores pueden utilizar, si lo desean, como plantillas para la elaboración de sus artículos.

SEIO:

Facultad de CC. Matemáticas, Despacho 502
Universidad Complutense de Madrid
Plaza de Ciencias, 3
28040 Madrid (Ciudad Universitaria)
oficina@seio.es, <http://www.seio.es>
Tel: (+34) 91 544 91 02

Imprime SEROTEL

Pº de la Castellana, 87.

Dep. Legal: M-13647-1995

ISSN: 1699-8871

Copyright © 2008 SEIO

ÍNDICE

Editorial	3
El rincón del presidente	5
1. Artículos de Estadística	6
▶ <i>Probabilistic Valuation of Certain Unit-linked Contracts</i> , Javier Villarroel	6
2. Artículos de Investigación Operativa	11
▶ <i>Mechanism Design in School Choice: Some Lessons in a Nutshell</i> , Flip Klijn	11
3. Estadística Oficial	23
▶ <i>Time-Reversion of VARMA Processes by Polynomial Methods</i> , Félix Aparicio Pérez y Victor Gómez Enríquez	23
4. Historia y Enseñanza	27
▶ <i>Smallpox and the Memory of D. Bernoulli. An Early Example of Applied Statistics</i> , José Antonio Camúñez Ruiz y Francisco Javier Ortega Irizo	27
5. Opiniones sobre la profesión	35
▶ <i>Necrológica: Sixto Ríos García</i> , Francisco Javier Girón González-Torre	35

EDITORIAL

Jesús López Fidalgo*

Instituto de Matemática Aplicada a la Ciencia y a la Ingeniería
Universidad de Castilla-La Mancha

Han pasado ya cuatro años desde que se me encomendó la dirección del Boletín. Quisiera hacer un poco de historia y aprovechar la ocasión para mencionar y agradecer a los que han colaborado de manera activa en este proyecto. En el momento en que Domingo Morales asumió la presidencia de la SEIO tenía un proyecto muy claro y atractivo de actualización del Boletín. Cuando me propuso llevarlo a cabo como editor no lo pensé demasiado. El reto me resultaba muy interesante y a la vez realista. Así y todo, pienso que en aquél momento ninguno de los dos imaginábamos que el Boletín se acabaría convirtiendo en lo que es hoy día. Hace un año el nuevo presidente de la SEIO, Ignacio García Jurado, depositó en mí su confianza de nuevo y me animó a continuar como editor al menos hasta que se asentara este proceso de evolución del Boletín, que no podemos decir que haya concluido ya, entre otras cosas porque debería seguir evolucionando con los tiempos.

Recientemente me he visto forzado a pedir mi relevo en la dirección del Boletín al haber asumido en mi universidad compromisos que me exigen una dedicación significativa de tiempo y esfuerzo. Además pienso que hemos llegado a un momento de cierta madurez del Boletín que permite hacer un cambio no traumático en la dirección. Por otro lado se ha encontrado una persona muy adecuada para continuar con la dirección del Boletín, como es María del Carmen Pardo Llorente, a la que he de agradecer que haya aceptado tomar el testigo.

Al comienzo se hizo un esfuerzo importante por formar un equipo amplio de corresponsales representando el mapa estadístico nacional. En estos años han pasado por este puesto unas cincuenta personas. Se establecieron unas secciones del boletín claramente delimitadas, una de ellas de información general y el resto de artículos de divulgación dentro del ámbito de la Estadística y de la Investigación Operativa. Al frente de estas últimas secciones se nombraron editores asociados, que han sido piezas clave en este proceso de transformación. Quiero ha-

cer especial mención a todos ellos, que han dedicado un tiempo del que no disponían para sacar adelante este proyecto en su primera fase. Pienso que toda la SEIO debe especial gratitud a Félix Aparicio Pérez, Miguel Ángel Gómez Villegas, Montserrat Herrador Cansado, Ana Meca Martínez, Manuel Molina Fernández, María del Carmen Pardo Llorente, Justo Puerto Albandoz, Gabriel Ruiz Garzón y Mayte Santos Martín. Gracias también a los que han sido editores técnicos, María Tocado y Javier Toledo Melero. Un reconocimiento especial para María Jesús Ríos, que aunque nunca figura explícitamente en los ejemplares del Boletín, tiene una parte muy significativa en la edición.

Se ha buscado que el editorial contara con una gran variedad de opiniones y puntos de vista mediante la colaboración de personas de reconocido prestigio nacional e internacional. Buscar un autor para el editorial ha sido una de las tareas más interesantes para mí. Las respuestas han sido muy variadas y en muchos casos sorprendentes. Junto a la no respuesta de algunos potenciales autores, no necesariamente los de más alta reputación, he tenido respuestas muy gratificantes, en muchos casos de personas de gran prestigio, a los que no ha sido necesario insistir y presionar para que enviaran su editorial a tiempo. A todos ellos, gracias. Muy en particular desearía agradecer al numeroso cuadro de corresponsales, cuya colaboración ha sido fundamental.

En un momento dado surge la idea de escindir el Boletín en una parte informativa, puramente electrónica y otra con artículos en formato tanto electrónico como en papel. Es curioso saber que uno de los motivos, no el único ni más importante, de este cambio tan oportuno fue el encarecimiento que sufrió la edición del boletín en un formato de mayor calidad material y con más páginas. Hubo también una traslación estratégica de los meses de publicación del Boletín, que se ha demostrado muy conveniente por diversos motivos. Recientemente esta separación se ha hecho completa mediante la edición

*E-mail: jesus.lopezfidalgo@uclm.es

de InfoSEIO, que tiene un editor independiente del editor del Boletín y cuya periodicidad es mayor. A partir de ahora el Boletín propiamente dicho recogerá solamente artículos y se editará tres veces al año en lugar de las cuatro que se venía editando. De este modo se espera contribuir a una mejora en la calidad y revisión de los artículos. Además se ha incorporado una nueva sección de Historia y Enseñanza. Aprovecho para agradecer a la actual editora de InfoSEIO, Mayte Santos Martín, su ayuda y colaboración en este proceso.

Se ha hecho también un esfuerzo importante de difusión del Boletín, tanto a nivel nacional como en la comunidad científica internacional. Durante estos años hemos procurado hacer llegar el Boletín a aquellas instituciones y personas que pudieran recibirlo con interés. También se ha procurado buscar publicidad que ayudara a costear la edición en papel a la vez que sirve como un medio más de difusión. A día de hoy el Boletín está referenciado en

MathScinet, Zentralblatt MATH, Current Index to Statistics y estamos a la espera de la evaluación a que está sometido en SCOPUS. En un futuro próximo se incluirá en la Biblioteca Digital Española de Matemáticas.

Para concluir los agradecimientos, quisiera añadir a todos los autores de artículos, cuyo esfuerzo tiene doble mérito. Por una parte, el tiempo y esfuerzo dedicados a componer un artículo adaptado a los requerimientos del Boletín, que no son los habituales de las revistas en las que estamos acostumbrados a publicar, no es nada despreciable. Por otro lado tiene especial reconocimiento por el escaso valor que en procesos de evaluación de la calidad se da a este tipo de publicaciones. He de acabar agradeciendo a los socios que de una manera u otra han valorado el trabajo que hemos realizado y con frecuencia así me lo han transmitido.

Gracias a todos por leer y difundir el Boletín.

EL RINCÓN DEL PRESIDENTE

Ignacio García Jurado

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Santiago de Compostela

Este número del boletín será el último en el que Jesús López Fidalgo actúe como editor y, con tal motivo, quiero agradecerle desde este rincón, que él mismo inventó, su excelente trabajo. Jesús puso en marcha un proceso de renovación que ha hecho evolucionar al boletín en la dirección correcta y lo ha transformado en la revista de alta divulgación que es hoy en día. Este proceso lo retomará la nueva editora, María del Carmen Pardo, a la que deseo el mayor de los éxitos en esta nueva etapa y a la que agradezco su entusiasmo y disposición.

También quiero recordar al profesor Sixto Ríos, que ha fallecido recientemente. Aunque casi no lo traté, conozco bien la enorme importancia que su figura ha tenido en el desarrollo de la estadística y la investigación operativa en España. Así pues, deseo reconocer desde aquí su labor, y mandarle un fuerte abrazo a toda su familia, especialmente a su

hija María Jesús, con la que he colaborado en muchas ocasiones en los últimos años y que lleva tanto tiempo trabajando por la SEIO.

El esfuerzo de Sixto Ríos y de otros pioneros de la estadística y la investigación operativa en España ha contribuido a la actual pujanza de estas disciplinas científicas en nuestro país. En este sentido debemos felicitar a dos de nuestros socios, a los que se han encomendado importantes tareas en el ámbito de las matemáticas españolas recientemente. En primer lugar, Marco Antonio López Cerdá ha sido elegido investigador coordinador del proyecto i-MATH que, con una gran financiación, pretende impulsar el salto a la excelencia de las matemáticas en España. También recientemente Ricardo Cao ha sido designado coordinador del área de matemáticas de la ANEP. A los dos les deseo que lleven a buen puerto sus proyectos.

1. ARTÍCULOS DE ESTADÍSTICA

PROBABILISTIC VALUATION OF CERTAIN UNIT-LINKED
CONTRACTS

Javier Villarroel*

Facultad de Ciencias, Plaza Merced, 37008 Salamanca
Universidad de Salamanca, Spain

Abstract

We consider the fair prize of insurance contracts with benefit received either at the insurer's demise or at maturity. Explicit formulas are given for a Brennan & Schwartz contract with benefit contingent on decease.

Keywords: Risk-neutral fair-price, unit-linked insurance contracts, martingale probability.

1. Introduction

A unit-linked insurance contract is a life insurance product where the benefit depends upon the value of some reference stock which is traded in some associated market. Valuation of these products is a natural area for probabilistic and statistical applications. Even though not so widespread as that of pricing purely financial products, this topic is becoming a classical one in the actuarial literature; it was first discussed by Brennan & Schwartz (1976) and Boyle & Schwartz (1977). See also Bacinello & Ortu (1993), Aase & Persson (1994), Ekern & Persson (1996), Boyle & Hardy (1997), Moeller (2001) and Bacinello (2005). We remark that the interplay between probability theory on the one hand, and insurance theory on the other, has been recognized for a long time (see for example Li and Ma, 2008). However, the problem of pricing insurance contracts linked to stocks considered here goes a step beyond, requiring new ideas and techniques as it involves actuarial considerations as well as financial ones.

Two sources of randomness are intrinsically associated to any probabilistic model that aims to describe these products. The first stems from the uncertainty in mortality. To model this, let $\tau : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ be the random time at which decease occurs for a given individual aged d at time 0. Mathematically, τ is defined on a probability space $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathbb{P}})$. Under natural assumptions the "life" conditional distri-

bution function (the *survival function* ${}_{\hat{T}}p_{t_1+d}$) and conditional density h read

$${}_{\hat{T}}p_{t_1+d} \equiv \bar{\mathbb{P}}(\tau > T | \tau > t_1) = e^{-\int_{t_1}^T \mu(s+d;s) ds} \quad (1.1)$$

and

$$h(T) = {}_{\hat{T}}p_{t_1+d} \mu(T+d;T) \quad (1.2)$$

where $\mu(t_1+d, t)$ is the mortality intensity and $\hat{T} \equiv T - t_1 > 0$.

The second source of uncertainty arises from the random nature of the stock markets. Here we consider a simple model of financial market consisting of two securities: a "savings account" whose value B_t at time t evolves via $B_t = B_0 e^{rt}$, where r is the (constant) instantaneous interest rate of the market. The second instrument in the market, *to which the insurance policy is linked*, is a given stock whose price at time t , X_t , varies according to a definite stochastic dynamics. The prototype model for stocks-price evolution after the seminal work of Black and Scholes (1973) and Merton (1973) assumes that X_t evolves via the Itô's stochastic differential equation

$$dX_t = \kappa X_t dt + \sigma X_t dW_t \quad (1.3)$$

Here κ is the mean return rate, σ the stock's volatility while W_t is a Brownian motion on a probability space $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, the "real world" probability. Note that we assume that r, κ and σ are constants.

*Corresponding Author. E-mail: javier@usal.es

We suppose that the contract considered here is "written" at a certain time t_1 and will expire or "mature" at a time $T > t_1$. At maturity T the contract holder is entitled to a benefit denoted by Ψ_T^1 where $\Psi_T^1 = \Psi^1(T; X_s, t_1 \leq s \leq T)$ is a functional of the future evolution of the stock up to maturity time. However, if the insurer's demise happens at a time τ before maturity, then the policy entitles the beneficiaries to a payment Ψ_τ^2 at the decease time. (This situation corresponds to "endowment insurance contracts"-see section 3.2 below- By contrast, for "pure endowment contracts", benefit is received only at maturity). Let Δ be the demise time or maturity, whichever comes first: $\Delta = \min\{T, \tau\}$. Given the benefit function $\Psi_\Delta \equiv \Psi_T^1 \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} + \Psi_\tau^2 \mathbf{1}_{\{t_1 \leq \tau < T\}}$, we determine in this paper explicit formulas for the *fair price* v_{t_1} required by the insurance firm at time t_1 to hedge the exposure to the evolution of the risky asset i.e., we determine the map $\Psi_\Delta \rightarrow v_{t_1}$.

2. Contract characteristics and valuation

In a unit-linked contract the premium v_{t_1} paid at time t_1 is invested in a stock. Let $X_t, 0 \leq t \leq T$ be the value at time t of an unit of the stock and let $\mathcal{F}_t \equiv \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$ be the filtration generated by the stock, which contains all information on past history and take $\mathcal{G} \equiv \mathcal{F}_\infty$. We shall also assume that our market is efficient, i.e., the existence of the Harrison and Pliska (1981) risk-neutral probability \mathbb{P}^* on $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ under which relative prices¹ of *all financial products* $v_t' \equiv v_t/B_t$ are martingales² with respect to the history of the process up to time t . No further reference will be made to the original, *real world* probability, so to ease notation we shall drop the symbol* and denote the martingale probability \mathbb{P}^* simply as $\mathbb{P} \equiv \mathbb{P}^*$.

We assume that the risk stemming from the market has no influence on the mortality risk. Thus, we can assume independence of the filtrations $\mathcal{F}_{t_1}, \bar{\mathcal{F}}_{t_1} \equiv \sigma(\mathbf{1}_{\{\tau > s\}}, 0 \leq s \leq t_1)$.

Let $\mathbb{E} \equiv \mathbb{E}^{\mathbb{P} \times \bar{\mathbb{P}}}$ denote the expectation with respect to the product measure $\mathbb{P} \times \bar{\mathbb{P}}$, $\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}$ expectation respect to the probability measure $\bar{\mathbb{P}}$ and so forth.

¹ similarly, the relative benefit $\Psi_t' \equiv \Psi_t/B_t$ compares our benefit with that investing the money in a savings account.

² It implies that one can not expect a better deal by delaying the "signature" of the contract to the future.

³ Note that the optional stopping theorem can be applied since $\bar{\mathbb{P}}(\Delta < \infty) = 1, \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left(\sup_{0 \leq s \leq T} \Psi_s^1\right) < \infty$.

We next note that the price process must satisfy:

$$(i) \quad \lim_{t_1 \uparrow T} v_{t_1} = \Psi_T^1. \quad (2.1)$$

$$(ii) \quad v_{t_1}' = \mathbb{E}\left(v_t' \middle| \mathcal{F}_{t_1} \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1}\right) \text{ or}$$

$$v_{t_1} e^{-rt_1} = e^{-rt} \mathbb{E}\left(v_t \middle| \mathcal{F}_{t_1} \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1}\right) \quad \mathcal{F}_{t_1} \leq t \leq T. \quad (2.2)$$

(i) states that we "pay just what we receive" if contract matures right after it is written. (ii) is the martingale property, alluded to above. Using Doob's optional stopping theorem it can be extended to random times³. We also require property (i) to hold if T is replaced by the random time τ . Hence

$$\begin{aligned} v_{t_1}' &= \mathbb{E}\left(v_\Delta' \middle| \mathcal{F}_{t_1} \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1}\right) = \mathbb{E}\left(\Psi_\Delta' \middle| \mathcal{F}_{t_1} \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1}\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(\Psi_T^1 \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} + \Psi_\tau^2 \mathbf{1}_{\{t_1 \leq \tau < T\}} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1}\right) = \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}\left(\Psi_T^1 \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1}\right) + \\ &= \mathbb{E}\left(\Psi_\tau^2 e^{-r\tau} \mathbf{1}_{\{t_1 \leq \tau < T\}} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1}\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Recalling that $\mathcal{F}_{t_1}, \bar{\mathcal{F}}_{t_1}$ are independent σ -fields we have

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}\left(\Psi_T^1 \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1}\right) = \\ &= \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left(\mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} \middle| \bar{\mathcal{F}}_{t_1}\right) \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\Psi_T^1 \middle| \mathcal{F}_{t_1}\right) = \\ &= \bar{p}_{t_1+d} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\Psi_T^1 \middle| \mathcal{F}_{t_1}\right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Similarly, using the tower property for conditional expectations we have in terms of the conditional density h of τ (see eq. (1.1))

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{t_1 \leq \tau < T\}} \Psi_\tau^2 e^{-r\tau} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1}\right) = \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{t_1 \leq \tau < T\}} \Psi_\tau^2 e^{-r\tau} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1}, \tau\right) \middle| \mathcal{F}_{t_1} \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left(\int_{t_1}^T h(s) e^{-rs} \Psi_s^2 ds \middle| \mathcal{F}_{t_1} \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1}\right) = \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\int_{t_1}^T h(s) e^{-rs} \Psi_s^2 ds \middle| \mathcal{F}_{t_1}\right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Thus the risk-neutral fair-price at time t_1 is made up of two terms, in correspondence with the benefits at maturity or at decease:

$$v_{t_1} \equiv v(T|t_1, x) = v_{t_1}^1 + v_{t_1}^2 \quad (2.6)$$

where

$$v_{t_1}^1 = {}_{\hat{T}}p_{t_1+d} e^{-r(T-t_1)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\Psi_T^1 \middle| \mathcal{F}_{t_1}\right), \quad (2.7)$$

$$v_{t_1}^2 \equiv \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\int_{t_1}^T h(s) e^{-r(s-t_1)} \Psi_s^2 ds \middle| \mathcal{F}_{t_1}\right). \quad (2.8)$$

We shall find it convenient to use the notation $v(T|t_1, X_{t_1}) \equiv v_{t_1}$ to stress that v_{t_1} depends not only on the "starting" values of time and of stock (t_1 and X_{t_1}) but also on the maturity time T .

In a generic case, explicit evaluation of $v_{t_1}^1$ and, mainly, of $v_{t_1}^2$ given by (2.8) can be a difficult matter. The case when Ψ_{τ}^2 can be represented as $\Psi_{\tau}^2 = \Psi_2(X_{\tau})$ in terms of a given increasing function $\Psi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is of particular interest in applications; further, in this case Eq. (2.8) can be simplified further since the Markovian nature of X_t yields

$$v_{t_1}^2 = \left[\int_0^{\hat{T}} \frac{h(s+t_1)}{B_s} \mathbb{E}_x^{\mathbb{P}}(\Psi_s^2) ds \right]_{x=X_{t_1}}. \quad (2.9)$$

For guaranteed unit-linked contracts the benefit at maturity depends on the value of the associated stock but there is a minimum guaranteed amount if the stock price falls below a fixed level; this can be taken to correspond to the capital accrued at a fixed interest rate δ , the "technical rate". The simplest example corresponds to a linear dependence on X in the benefit: suppose that both $\Psi_{\Delta}^{1,2} = X_{\Delta} + X_{t_1}(e^{\delta(\Delta-t_1)} - 1)$, say; here, contingent on an insurance event happening (maturity $\Delta = T$ or death $\Delta = \tau$) the insured receives the stock plus the interest accrued with rate δ . By substitution in eqs. (2.7) and (2.8) and using that X_t' is also a martingale the fair price is found in explicit way as

$$v_{t_1}^1 = {}_{\hat{T}}p_{t_1+d} X_{t_1} \left(1 + \frac{B_{t_1}}{B_T} (e^{\delta\hat{T}} - 1)\right),$$

$$v_{t_1}^2 = X_{t_1} \left(1 - {}_{\hat{T}}p_{t_1+d} +$$

$$\int_{t_1}^T h(s) \frac{B_{t_1}}{B_s} (e^{\delta(s-t_1)} - 1) ds\right). \quad (2.10)$$

When the mortality rate μ is constant one recovers the result of Shen & Xu (2005). A case of more interest, non-linear in X_T , is considered in the next section.

3. Valuation of endowment insurance contracts of Brennan & Schwartz type

We first review the case considered by Brennan & Schwartz (1976) and Boyle & Schwartz (1977) where $\Psi_T^1 = \max\{X_T, X_{t_1} e^{\delta\hat{T}}\}$, $\Psi_{\tau}^2 = 0$. Here, the insured receives *at maturity* the value of the associated stock; further, the initial capital, accrued at a fixed interest rate δ , is guaranteed, in case the stock price does not reach this level. In case of decease before maturity, beneficiaries are *not entitled to any extra benefit*.

3.1. Pure endowment case

Evaluation of the premium involves determining the corresponding expectation given by eq. (2.7); it can be obtained in closed form, as follows. Recall first that Girsanov's theorem implies that the evolution of X_t under the martingale probability is given by Eq. (1.1) where the drift κ is replaced by the instantaneous interest rate r of the market. The solution that at t_1 equals X_{t_1} is

$$X_t = X_{t_1} e^{\sigma(W_t - W_{t_1}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(t-t_1)} \stackrel{\text{Law}}{=} X_{t_1} e^{\sigma W_{\hat{t}} + q\hat{t}}, \quad t_1 \leq t \leq T$$

where we use that independence of Brownian increments implies that $W_t - W_{t_1} \stackrel{\text{Law}}{\sim} W_{\hat{t}}$ and define $q \equiv r - \frac{\sigma^2}{2}$, $\hat{t} \equiv t - t_1$. Say $X_{t_1} = x$. Using the Markovian nature of the benefit and the well known Gaussian distribution of Brownian motion $W_{\hat{t}} \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{\hat{t}})$ we obtain

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\Psi_T^1 \middle| \mathcal{F}_{t_1}\right) = \\ & \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(X_{t_1} \max\{e^{\sigma W_{\hat{T}} + q\hat{T}}, e^{\delta\hat{T}}\} \middle| X_{t_1} = x\right) = \\ & \int \frac{x}{\sqrt{2\pi\hat{T}}} e^{-y^2/(2\hat{T})} \max\{e^{q\hat{T} + \sigma y}, e^{\delta\hat{T}}\} dy = \\ & x \left(e^{r\hat{T}} \Phi(m_+ \sqrt{\hat{T}}) + e^{\delta\hat{T}} \Phi(-m_- \sqrt{\hat{T}}) \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

where

$$m_{\pm} \equiv \frac{\hat{r}}{\sigma} \pm \frac{\sigma}{2}, \quad \hat{r} \equiv r - \delta, \quad \hat{T} \equiv T - t \quad (3.2)$$

and Φ is the standard normal distribution function

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}. \quad (3.3)$$

Hence $v_{t_1}^1 \equiv v^1(T|t_1, x) =$

$$\hat{r} p_{t_1+d} x \left(\Phi(m_+ \sqrt{\hat{T}}) + e^{-\hat{r}\hat{T}} \Phi(-m_- \sqrt{\hat{T}}) \right). \quad (3.4)$$

The limit behavior for long values of \hat{T} is interesting; depending on whether $\hat{r} > 0$, $\hat{r} = 0$ or $\hat{r} < 0$ three different possibilities are found: $v^1(T|t_1, x)$ tends, respectively, to either $\hat{r} p_{t_1+d} x \equiv v^1(T|T, x)$, to $2\hat{r} p_{t_1+d} x$ or to ∞ . The result is easy to understand. The higher the guaranteed rate the more interesting the contract becomes. Further, when δ is higher than the market rate r , the relative benefit tends to ∞ asymptotically in time and so it does the fair price.

3.2. Endowment insurance contract

In the sequel we study valuation for a case that generalizes the result of Brennan & Schwartz to a contract paying $\Psi_T^1 = \max\{X_T, X_{t_1} e^{\delta(T-t_1)}\}$ at expiry or $\Psi_{\tau}^2 = \max\{X_{\tau}, X_{t_1} e^{\delta(\tau-t_1)}\}$ should decrease occur before maturity. It turns out that with this demise benefit an *analytical, exact* formula for the fair price can be *also* derived if an exponential distribution is assumed for the decrease rate: $h(t) = \mu e^{-\mu(t-t_1)}$ where the parameter μ^{-1} is the mean life. In this case, using (2.8) and (3.1) we find $v_{t_1}^2 \equiv v^2(T|t_1, x) =$

$$x\mu \int_0^{\hat{T}} \left(e^{-\mu s} \Phi(m_+ \sqrt{s}) + e^{-(\mu+\hat{r})s} \Phi(-m_- \sqrt{s}) \right) ds \quad (3.5)$$

and hence it involves the integral

$$I \equiv \int_0^{\hat{T}} e^{-\alpha s} \Phi(m \sqrt{s}) ds \quad (3.6)$$

By interchanging integrals we find

$$I = \frac{1}{2\alpha} \left[1 - \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 2\alpha}} + \right.$$

$$\left. \frac{2|m|}{\sqrt{m^2 + 2\alpha}} \Phi\left(\frac{|m|}{m} \sqrt{(m^2 + 2\alpha)\hat{T}}\right) - 2e^{-\alpha\hat{T}} \Phi(m\sqrt{\hat{T}}) \right]. \quad (3.7)$$

Thus, the demise contribution to the price is

$$\begin{aligned} v_{t_1}^2 &= \frac{x}{2} \left[1 - \frac{m_+}{\sqrt{\eta}} + \frac{2m_+}{\sqrt{\eta}} \Phi(\sqrt{\eta\hat{T}}) - \right. \\ &2e^{-\mu\hat{T}} \Phi(m_+ \sqrt{\hat{T}}) \left. \right] + \frac{x\mu}{2(\mu + \hat{r})} \left[1 - \frac{|m_-|}{\sqrt{\eta}} \right. \\ &+ \frac{2|m_-|}{\sqrt{\eta}} \Phi(-\sqrt{\eta\hat{T}} \text{sign } m_-) - \\ &\left. - 2e^{-(\mu+\hat{r})\hat{T}} \Phi(-m_- \sqrt{\hat{T}}) \right] \quad (3.8) \end{aligned}$$

where $\eta \equiv m_{\pm}^2 + 2\mu$ and m_{\pm} are defined in Eq. (3.2). The premium simplifies when the insurance company is committed to pay a technical interest rate δ satisfying $\delta = r$. In this case $m_{\pm} = \pm \frac{\sigma}{2}$, $\eta = \frac{\sigma^2}{4} + 2\mu$ and the full price $v_{t_1} \equiv v_{t_1}^1 + v_{t_1}^2$ for such a contract reads

$$v_{t_1} = x \left[1 + \frac{\sigma}{\sqrt{\eta}} \left(\Phi(\sqrt{\eta\hat{T}}) - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (3.9)$$

In Fig. 1 we plot $v_{t_1} \equiv v(T|t_1, x) = v(T-t_1|0, x)$ as a function of $T - t_1$. Notice how it starts from $v_{t_1} = x$ when $T - t_1 = 0$ and then it increases towards $x \left(1 + \frac{\sigma}{2\sqrt{\eta}} \right)$.

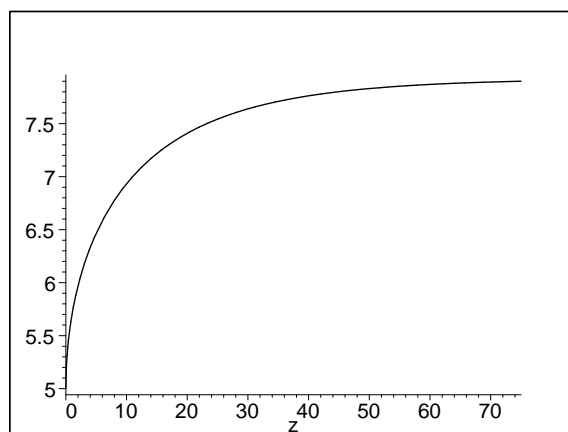


Figure 1: Fair price as a function of time to maturity given in years corresponding to a constant annual interest rate $r = 4.5\%$. Other parameters are: $X_{t_1} \equiv x = 5$, $\sigma = 25\%$, $\mu = 0.015$

Acknowledgement

We acknowledge support from MEC under contract No. FIS2005-01375.

References

- [1] Aase, K. & Persson, S.A. (1994). Pricing unit-linked life insurance policies. *Scand. Act. J.*, **1**, 26-52.
- [2] Bacinello, A.R. & Ortu, F. (1993). Pricing of unit-linked life insurance with endogenous minimum guarantees. *Ins. Math. Econ.*, **12**, 245-257.
- [3] Bacinello, A.R. (2005). Endogenous model of surrender conditions in equity-linked life insurance, *Ins. Math. Econ.*, **37**, 270- 296.
- [4] Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities, *J. Polit. Econ.*, **81**, 637-659.
- [5] Boyle, P.P. & Schwartz, E.S. (1977). Equilibrium Prices of Guarantees under Equity-Linked Contracts, *J. Risk Ins.*, **44**, 639-660.
- [6] Boyle, P.P. & Hardy, M.R. (1997). Reserving for maturity guarantees: two approaches. *Ins. Math. Econ.*, **21**, 113-127.
- [7] Brennan, M.J. & Schwartz, E.S. (1976). The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee, *J. Fin. Econ.*, **3**, 195-213.
- [8] Ekern, S. & Persson, S.A. (1996). Exotic unit-linked life insurance contracts. *Geneva Papers Risk Ins. Th.* **21**, 35-63.
- [9] Harrison, J.M. & Pliska, S. (1981). *Stoch. Proc. Appl.* **11** 215-260.
- [10] Merton, R.C. (1973). *J. Econ. Manag. Sci.*, **4**, 141-183.
- [11] Moeller, T. (2001). Hedging equity-linked life insurance contracts, *North Amer. Act. J.*, **5(2)**, 79-95.
- [12] Shen, W. & Xu, H. (2005). The valuation of unit-linked policies with or without surrender options, *Ins. Math. Econ.*, **36**, 79- 92.
- [13] Li, J. & Ma, S. (2008). Some Probability Applications to the Risk Analysis in Insurance Theory, *Boletín SEIO*, **24 (1)**, 20-24

Javier Villarroel is "Professor Titular" in the Universidad de Salamanca and for almost twenty years a Visiting research scholar at the Dept. Appl. Math., University of Colorado. His research interest focuses on Stochastic differential equations and processes and the applications to Finance, Insurance and Physics. Other topics of research are partial differential equations and dynamical systems.

2. ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

MECHANISM DESIGN IN SCHOOL CHOICE: SOME LESSONS IN A NUTSHELL

Flip Klijn*

Institute for Economic Analysis (CSIC)
Campus UAB, Bellaterra (Barcelona)

Abstract

This paper deals with school choice as an application of matching theory. Although the use of matching theory for the design and study of school choice mechanisms is rather recent, some of its tools were already successfully employed in several other markets, the most noticeable being the labor market for medical doctors in the US. I first briefly describe the problems that some US school districts had, and why and how economic engineering has contributed a lot to the improvement of school choice programs. Then, I will review and interpret a selection of the most recent developments and results.

Keywords: school choice, matching, stability, efficiency, strategy-proofness, preference revelation, indifferences

1. Introduction

A common feature of many markets is their bilateral structure and the need to match agents from one side of the market to the other side of the market. An important instance is the assignment of students to colleges, or workers to firms.

When David Gale and Lloyd Shapley published their elegant paper back in 1962 they probably did not imagine the stream of literature that would follow.¹ They described a model in which students have to be matched to colleges, and where each student and each college has preferences over the other side of the market. They proposed an algorithm that always produces a matching (assignment) that is stable in the following sense: each agent obtains an acceptable mate, and no pair of agents who are not matched to one another would prefer to be. Their algorithm is referred to as the

“deferred acceptance algorithm,” the reason being that (loosely speaking) its two key elements are the “proposals” from either side of the market and the “deferred acceptance” by the other side of the market.

Gale and Shapley’s deferred acceptance algorithm has turned out to be key in the design of many markets. In fact, even before Gale and Shapley’s paper appeared in the *American Mathematical Monthly* very similar ideas were already incorporated in the design of the first centralized market for medical doctors in the US. More recently, variants of the deferred acceptance algorithms were implemented after the redesign of school choice systems in Boston and New York.² Every now and then variants of the deferred acceptance algorithm are independently rediscovered and implemented to solve market failures.³

In their pioneering paper, Abdulkadiroğlu and

*Corresponding Author. E-mail: flip.klijn@iae.csic.es. I thank Bettina Klaus and Ana Meca for their comments on an earlier version of this paper. Any remaining errors are mine. Financial support through *Plan Nacional I+D+I* (SEJ2005-01690), the *Consolider-Ingenio* 2010 (CSD2006-00016) program, and the Barcelona Economics Program of XREA is gratefully acknowledged.

¹For an overview until 1989, see Gusfield and Irving (1989) and Roth and Sotomayor (1990). Al Roth’s game theory, experimental economics, and market design page has an updated bibliography.

²See Abdulkadiroğlu, Pathak, and Roth (2005) and Abdulkadiroğlu, Pathak, Roth, and Sönmez (2005) for reports on the redesign of the New York and Boston school matches, respectively.

³To mention a few: medical interns in the US and the UK (Roth, 1990), secondary schools in Singapore (Teo et al., 2001), and higher education in Hungary (Biró, 2008), Spain (Romero-Medina, 1998), and Turkey (Balinski and Sönmez, 1999). See also Roth’s (2008a) review on the theory and practice of the deferred acceptance algorithm.

Sönmez (2003) discussed some of the problems that several US school districts were experiencing and proposed two student assignment mechanisms. One mechanism they proposed is directly based on Gale and Shapley's deferred acceptance algorithm. The other mechanism is based on Gale's Top Trading Cycles algorithm, which is first described by Shapley and Scarf (1974) in the context of so-called housing markets. Each of the two mechanisms has a desirable feature that the other mechanism fails to satisfy. The Gale-Shapley mechanism is stable, but not (Pareto-)efficient, i.e., there are situations in which the mechanism yields a matching that can be improved upon for some students without hurting the others. The Top Trading Cycles mechanism on the other hand is efficient, but not stable.

A first question of course is why certain school choice districts were experiencing problems until very recently. This is what I discuss in Section 2. In Section 3, I recall Abdulkadiroğlu and Sönmez's (2003) model of school choice and give a description of the mechanisms involved. Next, in Section 4, I address some important questions and complications for the full application of the theory to real school choice problems. I review and interpret a selection of the most recent developments and results.⁴ Section 5 concludes.

2. Why mechanism design in school choice?

The key issue of school choice is providing the parents of a child the possibility to have a say in the assignment of their child to a public school. In their study of school choice plans in the US, Abdulkadiroğlu and Sönmez (2003) mentioned two basic shortcomings of several school choice programs until recently. First, it turned out that many school districts simply did not have rigorous procedures. (In fact, until a decade ago children were assigned to public schools without taking into account the preferences of the parents at all.) This very often led to evasive action by the students and their parents that took its ultimate form in court cases, which were very often won by the parents, making the procedure even more vulnerable to future "attacks." Second, the school choice programs that did have explicit procedures suffered from serious short-

comings. A representative case is the mechanism that was used in the Boston school district. Since seats in schools are a scarce resource it is generally not possible to assign each student to his most preferred school. Therefore, apart from the students' preferences the Boston (and other) school district authorities took into account the priorities of students for schools. The priority of a student for a particular school typically is determined by factors as living in the walk zone of the school, siblings already attending the school, etc.

The major problem with the Boston mechanism was that students possibly could benefit from misrepresenting their preferences over schools. In other words, the Boston mechanism is not strategy-proof. A more detailed description of the mechanism is given in the next section, but to see why it is not strategy-proof it is enough to know that it first tries to assign as many students as possible to their first choice. More precisely, seats of a school are filled by students that put it as a first choice, one by one, following the priority order for that school. It is only when all possible first choices are assigned when the mechanism considers the second choices of the remaining (still unassigned) students. The problem is that a student that remains unassigned in the first round now may fail to get its second choice because this school has exhausted its capacity with students that put it as a first choice. This may even be true for a school that the student would have been assigned to had he put it as a first choice. In other words, even if the student has a higher priority than the students that were assigned to the school in the first round, the school remains out of reach. Hence, the Boston mechanism forces participants to play a complicated admissions game. Another cost of the Boston mechanism not being strategy-proof is that it does not provide the information the authorities would like to have — if parents do not reveal their true preferences it is hard to set the right policies or make appropriate changes. Abdulkadiroğlu and Sönmez (2003) therefore argued replacing the Boston mechanism by the Gale-Shapley or Top Trading Cycles mechanisms: both mechanisms are strategy-proof and each has additional desirable properties. An experimental study of Chen and Sönmez (2006) confirmed the superiority of the

⁴By no means do I claim this review to be exhaustive. The number of studies on school choice using matching theory is quickly growing.

latter two mechanisms over the Boston mechanism. Their data shows that the Boston mechanism induces massive preference manipulation, and, as a consequence, significant welfare loss.

Abdulkadiroğlu, Pathak, Roth, and Sönmez (2006) provided empirical evidence that under the Boston mechanism there are different levels of sophistication of play. On the one hand, there are parents groups that discuss how to submit preferences strategically. On the other hand, there is also a large number of parents that do not strategize (well). As a consequence, the first groups of parents systematically obtain “better” results than the latter. This evidence was one of the reasons why the Boston school district authorities replaced the Boston mechanism by the Gale-Shapley mechanism. Abdulkadiroğlu, Pathak, Roth, and Sönmez (2005) report on some further design considerations.

Around the same time, Atila Abdulkadiroğlu, Parag Pathak, Alvin Roth, and Tayfun Sönmez assisted the New York City department in the design of a new student assignment mechanism. New York City has the largest public school system in the US and each year there are about 90,000 entering students. Abdulkadiroğlu, Pathak, and Roth (2005) pointed out that the matching system that was in use suffered from three problems. First, there were not enough rounds to allocate all students, and as a consequence, about 30,000 students were assigned to a school that was not on their list. Second, the parents had to strategize (very much for the same reason as in Boston). Third, schools acted as strategic agents by withholding some of their capacity. This last point already hints at what was concluded after the initial discussions in the redesign process: the New York City schools are a two-sided market. The experience and the success of the redesign of a very similar two-sided market, where American physicians are assigned to hospitals through the Gale-Shapley mechanism, became very useful (see Roth and Peranson, 1999 and Roth, 2002 for details). It was decided to adapt the Gale-Shapley mechanism to the particular needs and characteristics of the New York City school match. Abdulkadiroğlu, Pathak, and Roth (2005) report on the first year of operation of the new mechanism. In contrast to the previous mechanism, only about 3,000 were assigned to schools they did not list. One (but not the only) reason is that in the new mechanism

students are allowed to rank 12 schools (instead of the previous maximum of 5). In Section 4.2, I will discuss this restriction on the length of submittable preference lists in more detail.

Further theoretical, experimental, and empirical studies have disentangled some of the open problems and have provided additional insights in the design of student assignment mechanisms. In the next session I will first recall the basic model and give a description of the three mechanisms. Subsequently I will focus on some concerns that mostly deal with the gap between the simplifications inherent to the modeling and real-life school choice procedures.

3. The model

Following Abdulkadiroğlu and Sönmez (2003), a *school choice problem* is defined by a set of schools and a set of students, each of which has to be assigned a seat at not more than one of the schools. Each student is assumed to have strict preferences over the schools and the option of remaining unassigned. Each school is endowed with a strict priority ordering over the students and a fixed capacity of seats. Formally, a *school choice problem* is a 5-tuple (I, S, q, P, f) that consists of

1. a set of *students* $I = \{i_1, \dots, i_n\}$,
2. a set of *schools* $S = \{s_1, \dots, s_m\}$,
3. a *capacity* vector $q = (q_{s_1}, \dots, q_{s_m})$,
4. a profile of strict *student preferences* $P = (P_{i_1}, \dots, P_{i_n})$, and
5. a strict *priority structure* of the schools over the students $f = (f_{s_1}, \dots, f_{s_m})$.

We denote by i and s a generic student and a generic school, respectively.

The preference relation P_i of student i is a linear order over $S \cup \{i\}$, where i denotes his outside option (e.g., enrolling in a private school). Student i prefers school s to school s' if $sP_i s'$. School s is *acceptable* to i if $sP_i i$. Let R_i denote the weak preference relation associated with the preference relation P_i .

The *priority ordering* f_s of school s assigns ranks to students according to their priority for school s . The *rank* of student i for school s is $f_s(i)$. Then, $f_s(i) < f_s(j)$ means that *student i has higher priority (or lower rank) for school s than student j .*

Throughout the paper the set of students I and the set of schools S do not vary. Hence, a *school choice problem* is given by a triple (P, f, q) , or simply by P when no confusion is possible.

School choice is closely related to the college admissions model (Gale and Shapley, 1962). The only but key difference between the two models is that in school choice schools are mere “objects” to be consumed by students, whereas in the college admissions model (or more generally, in two-sided matching) both sides of the market are agents with preferences over the other side. In other words, a college admissions problem is given by 1–4 above and 5’ below:

$$5'. \text{ a profile of strict school preferences } P_S = (P_{s_1}, \dots, P_{s_m}),$$

where P_s denotes the strict preference relation of school $s \in S$ over the students.

Priority orderings in school choice can be reinterpreted as school preferences in the college admissions model. Therefore, many results or concepts for the college admissions model have their natural counterpart for school choice.⁵ In particular, an outcome of a school choice or college admissions problem is a *matching* $\mu : I \cup S \rightarrow 2^I \cup S$ such that for any $i \in I$ and any $s \in S$,

- $\mu(i) \in S \cup \{i\}$,
- $\mu(s) \in 2^I$,
- $\mu(i) = s$ if and only if $i \in \mu(s)$, and
- $|\mu(s)| \leq q_s$.

For $i \in I$, if $\mu(i) = s \in S$ then student i is *assigned* a seat at school s under μ . If $\mu(i) = i$ then student i is *unassigned* under μ .

A key property of matchings in the two-sided matching literature that does not lose its importance in school choice is stability. Informally, a matching is stable if, for any student, all the schools he prefers to the one he is assigned to have exhausted their capacity with students that have higher priority. Formally, let P be a school choice problem. A matching μ is stable if

- it is *individually rational*, i.e., for all $i \in I$, $\mu(i)R_i i$,
- it is *non wasteful* (Balinski and Sönmez, 1999), i.e., for all $i \in I$ and all $s \in S$, $sP_i\mu(i)$ implies $|\mu(s)| = q_s$, and

- there is no *justified envy*, i.e., for all $i, j \in I$ with $\mu(j) = s \in S$, $sP_i\mu(i)$ implies $f_s(j) < f_s(i)$.

The set of stable matchings is denoted by $S(P)$.

Another desirable property for a matching is Pareto-efficiency. In the context of school choice, the schools are mere “objects.” Therefore, to determine whether a matching is Pareto-efficient we only take into account students’ welfare. A matching μ' Pareto dominates a matching μ if all students prefer μ' to μ and there is at least one student that strictly prefers μ' to μ . Formally, μ' *Pareto dominates* μ if $\mu'(i)R_i\mu(i)$ for all $i \in I$, and $\mu'(i')P_{i'}\mu(i')$ for some $i' \in I$. A matching is *Pareto-efficient* if it is not Pareto dominated by any other matching. We denote the set of Pareto-efficient matchings by $PE(P)$.

A (student assignment) *mechanism* systematically selects a matching for each school choice problem. A mechanism is stable (or Pareto-efficient) if it always selects a stable (or Pareto-efficient) matching. A mechanism φ is manipulable by student i at problem P if there exists a preference relation P'_i such that $\varphi(P_{-i}, P'_i)(i)P_i\varphi(P)(i)$. A mechanism is *strategy-proof* if no student can ever manipulate it. In other words, a mechanism is strategy-proof if no student can ever benefit by unilaterally misrepresenting his preferences.⁶

3.1. The three mechanisms

The following concise description, which is taken from Calsamiglia et al. (2007), integrates the three student assignment mechanisms that I discussed earlier. It distinguishes between the students’ and the schools’ point of view. The reason is that in the eventual computations the three mechanisms only differ in the way a student is “rejected” by a school.

The Boston (β , BOS), Gale-Shapley (γ , GS), and Top Trading Cycles (τ , TTC) mechanisms:

Step 1: For each school, a priority ordering of students is determined (based on state and local laws/policies, etc.).

Step 2: Each student submits a preference ranking of the schools.

⁵See, for instance, Balinski and Sönmez (1999).

⁶In game theoretic terms, a mechanism is strategy-proof if truthful preference revelation is a weakly dominant strategy.

Step 3: The assignment of seats is obtained through an algorithm, as follows.

ROUND k , $k \geq 1$ [STUDENTS]: Each student that has not been removed yet but is rejected in the previous round⁷ points to the next highest ranked school in his submitted list that has not been removed yet (if there is no such school then the student points to himself).

ROUND k , $k \geq 1$ [SCHOOLS, **BOS**]: Each school assigns seats one at a time to the students that point to it following its priority order. If the school capacity is or was attained, the school rejects any remaining students that point to it. If a student points to himself, he is assigned to himself. Any student that is assigned is removed.

The Boston algorithm terminates when all students have been removed.

ROUND k , $k \geq 1$ [SCHOOLS, **GS**]: Each school tentatively assigns seats one at a time to the students that point to it following its priority order. When the school capacity is attained the school rejects any remaining students that point to it. If a student points to himself, he is tentatively assigned to himself.

The Gale-Shapley algorithm terminates when no student is rejected. The tentative matching becomes final.

ROUND k , $k \geq 1$ [SCHOOLS, **TTC**]: Each school that has not been removed yet points to the student with highest priority among the students that have not been removed yet. There is at least one cycle. If a student is in a cycle he is assigned a seat at the school he points to (or to himself if he is in a self-cycle). Students that are assigned a seat are removed. If a school is in a cycle then its number of vacant seats is decreased by 1. If a school has no longer vacant seats then it is removed.

The Top Trading Cycles algorithm terminates when all students or schools have been removed.

The Gale-Shapley and Top Trading Cycles mechanisms are strategy-proof, but the Boston mechanism is not. The Gale-Shapley mechanism is also stable. In fact, it always generates the best stable matching for the students. However, it is not Pareto

efficient. In contrast, the Top Trading Cycles mechanism is Pareto efficient but not stable. In fact, it is well-known that stability and efficiency are incompatible. That is, there is no mechanism that is both stable and efficient. The Boston mechanism is Pareto efficient, but since it is not strategy-proof, Pareto efficiency is likely to be distorted in practice.

4. Issues in the design of student assignment mechanisms

Below I will discuss, in no particular order, some of the key issues that played a role in the design of student assignment mechanisms or that possibly will be relevant in future redesigns.

4.1. Indifference classes in the priority structure

An important question in the application of theory of school choice to real-life situations is the presence of indifferences in the priority structure f . In practical situations there is only a limited number of relevant criteria that determine the priority of each student for a given school. Thus, it may happen that some students have exactly the same priority, i.e., there are distinct students i, j and a school s such that $f_s(i) = f_s(j)$. Then, instead of having a strict priority list, a school's priority list typically contains several indifference classes. From the school's point of view, all students in the same indifference class are indistinguishable. Clearly, this complication is relevant if (and only if) some students of the same indifference class compete for the same school seat.

A first idea is to break the ties in order to get rid of the indifference classes and obtain a strict priority structure. Next, one can apply either the Gale-Shapley or Top Trading Cycles mechanism. Regarding the Top Trading Cycles mechanism, Pathak (2007) shows that it is insensitive to how ties are broken. The Gale-Shapley mechanism, however, is very much affected by the way the ties are broken. Erdil and Ergin (2008) show by means of an example that if we break ties in an arbitrary way, then it is possible that the stable matching induced by the Gale-Shapley mechanism is Pareto dominated by another stable matching. Gale and Shapley (1962) showed that this is never the case in their original setting without indifferences.

⁷In order to incorporate the initial step correctly, we use the convention that at "Round 0" all students are rejected.

Erdil and Ergin (2008) propose the following procedure to obtain a stable matching that is not Pareto dominated by any other stable matching. They first introduce the concept of a stable improvement cycle.

Definition 4.1. (Erdil and Ergin, 2008)

A matching μ admits a *stable improvement cycle* if there is a cycle of distinct students $\langle i_1, \dots, i_n =: i_0 \rangle$ ($n \geq 2$) such that for any $l = 0, \dots, n-1$, $\mu(i_{l+1})P_{i_l}\mu(i_l) \in S$ and $f_{\mu(i_{l+1})}(i_l) = \min \{f_{\mu(i_{l+1})}(j) : j \in I \text{ and } \mu(i_{l+1})P_j\mu(j)\}$. \triangle

Loosely speaking, each student i in a stable improvement cycle desires the school s to which the next student in the cycle is assigned at μ , and in addition student i has the highest priority (i.e., lowest rank order) among all students that desire school s .

Given a stable improvement cycle $\langle i_1, \dots, i_n =: i_0 \rangle$ for a matching μ , one can construct a new matching μ' as follows,

$$\mu'(j) := \begin{cases} \mu(j) & \text{if } j \notin \{i_1, \dots, i_n\}, \\ \mu(i_{l+1}) & \text{if } j = i_l \text{ for} \\ & \text{some } l = 0, \dots, n-1. \end{cases}$$

One easily verifies that if μ is stable, then the matching μ' that results from “satisfying” the stable improvement cycle is again a stable matching.

Theorem 4.1. (Erdil and Ergin, 2008)

Let μ be a stable matching. If μ is Pareto dominated by another stable matching, then μ admits a stable improvement cycle.

This result induces a simple algorithm to find a matching μ^* that is stable and constrained efficient. Here, *constrained efficient* means that there is no other *stable* matching that Pareto dominates μ^* . (Of course, this does not discard the existence of an unstable matching that Pareto dominates μ^* .) First, break the ties of the priority structure in an arbitrary way and apply the deferred acceptance algorithm to obtain a stable matching. Next, satisfy iteratively stable improvement cycles. Clearly, this algorithm terminates in a finite number of steps and by Theorem 4.1 the resulting matching is stable and constrained efficient. In fact, Erdil and Ergin (2008) show that their algorithm has a remarkably small computational complexity. More-

over, Abdulkadiroğlu, Pathak, and Roth (2008) report that if the algorithm would have been applied to the preference data of the 2003-2004 New York City school match, then more than 10% of the about 64,000 students involved would have been assigned to a strictly preferred school, without hurting the other students.

Given that in practice the priority structure is not strict, why not immediately replace the Gale-Shapley mechanism by the algorithm proposed by Erdil and Ergin (2008)? A problem of the latter algorithm is that it cannot induce a strategy-proof mechanism. (Note that there is range of possibilities for such mechanism since the final matching crucially depends on the tie-breaking.) In other words, unlike the Gale-Shapley mechanism, it does not make it a (weakly) dominant strategy to state one’s true preferences. In fact, Erdil and Ergin (2008) proved the following impossibility result.

Theorem 4.2. (Erdil and Ergin, 2008)

There is no mechanism that is both strategy-proof and constrained efficient.

Abdulkadiroğlu, Pathak, and Roth (2008) further analyzed the impact of the presence of ties in the priority structure. A *tie-breaker* is a bijection $r : I \rightarrow \{1, \dots, n\}$ and can be used to break ties at a school s by replacing its priority f_s by f'_s as follows: $f'_s(i) < f'_s(j)$ if and only if [$f_s(i) < f_s(j)$ or [$f_s(i) = f_s(j)$ and $r_s(i) < r_s(j)$]]. A *tie-breaking rule* is a collection of tie-breakers, one for each school. A single-tie breaking rule uses the same tie-breaker for all schools, a multiple-tie breaking rule may use different tie-breakers for different schools. Let γ^r denote the mechanism that yields the matching from the deferred acceptance algorithm, after breaking possible ties according to r .

Using data from the New York City school match they compared different single and multiple-tie breaking rules obtained from independent draws from uniform distributions. On the one hand, single-tie breaking does not stochastically dominate multiple-tie breaking. On the other hand, the mean and the number of students that receive their top choices are higher under single-tie breaking than multiple-tie breaking. The next theoretical result further supports the use of a single-tie breaking rule.

Theorem 4.3. (Abdulkadiroğlu, Pathak, and Roth, 2008)

For any priority structure f and any school choice problem P , if μ is constrained efficient then there is a single-tie breaking rule r such that $\gamma^r(P) = \mu$.

As has been pointed out before, if we use a tie-breaking rule and apply the deferred acceptance algorithm then the resulting matchings need not be constrained efficient. Theorem 4.2 implies that Pareto improving upon these matchings comes at the price of losing strategy-proofness. Abdulkadiroğlu, Pathak, and Roth (2008) further strengthen this result as follows. A mechanism dominates another mechanism if the first mechanism always gives a weakly better match to all students than the second mechanism, and for some school choice problem and for some student the first mechanism gives a strictly better match than the second mechanism.

Theorem 4.4. (Abdulkadiroğlu, Pathak, and Roth, 2008)

For any tie-breaking rule r , there is no strategy-proof mechanism that dominates γ^r .

4.2. Constrained school choice

Real-life school choice situations typically involve a large number of participants and a relatively small number of school programs. Parents are often asked to submit a preference list containing only a limited number of schools.⁸ In other words, there is a constraint or quota on the number of schools that can be listed. This restriction is reason for concern: true preference revelation is (typically) no longer an option. As a consequence, the Gale-Shapley and Top Trading Cycles mechanisms are no longer strategy-proof. Since the (desirable) properties of the two mechanisms are relative to the revealed preferences, it is far from clear what these properties mean in case the revealed preferences are not the true preferences. In the setting of “constrained school choice” (i.e., school choice with a restriction on the length of submittable preference lists), it is likely that participants adopt strategic behavior. For instance, if a participant fears rejection by his most preferred programs, it can be advantageous not to apply to these programs and

use instead its allowed application slots for less preferred programs.

Manipulability

Pathak and Sönmez (2008b) develop a notion to compare mechanisms that are not strategy-proof based on the degree to which they encourage manipulation. Subsequently, they use their notion to compare several well-known mechanisms in the matching and auction literature. One specific case is the setting of constrained school choice where the Gale-Shapley and Top Trading Cycles mechanisms are not strategy-proof.

Pathak and Sönmez (2008b) call a mechanism ψ weakly more manipulable than mechanism φ if whenever φ is manipulable, ψ is also manipulable, even though the converse does not hold. Equivalently, ψ is weakly more manipulable than φ if whenever truth-telling is a Nash equilibrium under ψ truth-telling is a Nash equilibrium under φ as well.

Theorem 4.5. (Pathak and Sönmez, 2008b)

The stronger the restriction on the length of submittable preferences lists (i.e., the smaller the quota) the weakly more manipulable becomes the Gale-Shapley mechanism.

Theorem 4.6. (Pathak and Sönmez, 2008b)

Let $1 \leq k < m$. If students can list at most k schools, then the Boston mechanism is weakly more manipulable than the Gale-Shapley mechanism.

Pathak and Sönmez (2008b) consider also a second notion to compare manipulability of different mechanisms: a mechanism ψ is strongly more manipulable than mechanism φ if at any profile R , any student that can manipulate φ can also manipulate ψ , even though the converse does not hold. Next, they show by means of an example that Theorem 4.6 cannot be strengthened through replacement of the first notion by the second notion.

An interesting open problem is how the Top Trading Cycles mechanisms compares to the other two mechanisms and whether it becomes more manipulable as the restriction on the length of submittable preferences becomes more stringent.

Stability and efficiency

Haeringer and Klijn (2007) study the impact of the constraint on stability and efficiency by intro-

⁸For instance, in the school district of New York City each year more than 90,000 students are assigned to about 500 school programs, and parents are asked to submit a preference list containing at most 12 school programs (Abdulkadiroğlu, Pathak, and Roth, 2005, 2008).

ducing a preference revelation game where students can only declare up to a fixed number (the *quota*) of schools to be acceptable. Each possible quota, from 1 up to the total number of schools, together with a student assignment mechanism induces a strategic “quota-game.” Since the presence of the quota eliminates the existence of a dominant strategy when the mechanism at hand is the Gale-Shapley and Top Trading Cycles mechanisms, we focus on the Nash equilibria of the quota-games.

Fix the priority ordering f and the capacities q . Given a profile of preferences $P = (P_{i_1}, \dots, P_{i_n})$, a quota k with $1 \leq k \leq m$, and a mechanism φ , the induced *quota-game* $\Gamma^\varphi(P, k)$ is a triple $\langle I, \mathcal{Q}(k)^I, P \rangle$. The strategy set of each player (student) is the set of preference lists with at most k acceptable schools which is denoted by $\mathcal{Q}(k)$. Outcomes of the game are evaluated through the true preferences P . Let $\mathcal{E}^\varphi(P, k)$ and $\mathcal{O}^\varphi(P, k)$ denote the set of Nash equilibria and Nash equilibrium outcomes, respectively. Haeringer and Klijn (2007) show that for all three mechanisms discussed above there are Nash equilibria in pure strategies.

Below I summarize the results regarding the stability of the equilibrium outcomes, and subsequently comment on efficiency. The following benchmark is, given the negative empirical evidence regarding the Boston mechanism, quite surprising.

Theorem 4.7. (Ergin and Sönmez, 2006 and Haeringer and Klijn, 2007)⁹

For any quota k and any school choice problem P , the game $\Gamma^\beta(P, k)$ implements $S(P)$ in Nash equilibria, i.e., $\mathcal{O}^\beta(P, k) = S(P)$.

When $k = 1$ the deferred acceptance algorithm consists of only one step, which moreover coincides with the (then also unique step) of the Boston algorithm, i.e., $\Gamma^\gamma(P, 1) = \Gamma^\beta(P, 1) = S(P)$. In case $k \neq 1$, it is easy to see that under the Gale-Shapley mechanism each stable matching can still be obtained as an equilibrium outcome. However, as Example 3 in Sotomayor (1998) already showed, not all equilibrium outcomes need to be stable. Therefore, an important question is to find out whether and when we can guarantee a stable outcome. One possible interpretation of “when” is to find necessary and sufficient conditions on the priority structure.

⁹Ergin and Sönmez (2006) deal with $k = m$. Kojima (2008) extends their result to the case with general priority structures.

For $s \in S$ and $i \in I$, we denote by $U_s^f(i)$ the set of students that have higher priority than student i for school s , i.e., $U_s^f(i) = \{j \in I : f_s(j) < f_s(i)\}$.

Definition 4.2. Ergin-Acyclicity (Ergin, 2002)

Given a priority structure f , an *Ergin-cycle* is constituted of distinct $s, s' \in S$ and $i, j, l \in I$ such that the following two conditions are satisfied:

Ergin-cycle condition: $f_s(i) < f_s(j) < f_s(l)$ and $f_{s'}(l) < f_{s'}(i)$ and

ec-scarcity condition: there exist (possibly empty and) disjoint sets $I_s, I_{s'} \subseteq I \setminus \{i, j, l\}$ such that $I_s \subseteq U_s^f(j)$, $I_{s'} \subseteq U_{s'}^f(i)$, $|I_s| = q_s - 1$, and $|I_{s'}| = q_{s'} - 1$. A priority structure is *Ergin-acyclic* if no Ergin-cycles exist. \triangle

Theorem 4.8. (Haeringer and Klijn, 2007)

Let $k \neq 1$. Then, f is an Ergin-acyclic priority structure if and only if for any school choice problem P , $\mathcal{O}^\gamma(P, k) = S(P)$.

Definition 4.3. Kesten-Acyclicity (Kesten, 2006)

Given a priority structure f , a *Kesten-cycle* is constituted of distinct $s, s' \in S$ and $i, j, l \in I$ such that the following two conditions are satisfied:

Kesten-cycle condition $f_s(i) < f_s(j) < f_s(l)$ and $f_{s'}(l) < f_{s'}(i), f_{s'}(j)$ and

kc-scarcity condition there exists a (possibly empty) set $I_s \subseteq I \setminus \{i, j, l\}$ with $I_s \subseteq U_s^f(i) \cup [U_s^f(j) \setminus U_{s'}^f(l)]$ and $|I_s| = q_s - 1$.

A priority structure is *Kesten-acyclic* if no Kesten-cycles exist. \triangle

Kesten-acyclicity implies Ergin-acyclicity (Lemma 1, Kesten, 2006). It is easy to check that the reverse holds if all schools have one seat.

Theorem 4.9. (Haeringer and Klijn, 2007)

Let $1 \leq k \leq m$. Then, f is a Kesten-acyclic priority structure if and only if for any school choice problem P , $\mathcal{O}^\tau(P, k) = S(P)$.

Theorems 4.7–4.9 show that in all three school choice procedures stability can be guaranteed by strategic interaction in spite of possible constraints on preference revelation. While no particular assumption is needed for the Boston mechanism, stringent conditions are required for the Gale-Shapley and the Top Trading Cycles mechanisms. Since real-life priority structures typically do not satisfy these conditions, the transition to either of

the supposedly superior mechanisms may yield “unfair” assignments in the sense that there are students that prefer a seat that is occupied by a lower priority student.

Regarding efficiency, Haeringer and Klijn (2007) identify similar (but new) acyclicity conditions and show that they are necessary and sufficient to guarantee the efficiency of the three mechanisms. Qualitatively, the two (main) differences are that (i) the Boston and Gale-Shapley mechanisms perform equally well (or bad), and (ii) the Top Trading Cycles mechanism performs better than the other two mechanisms.

As a closing remark, the acyclicity conditions that guarantee stability or Pareto-efficiency are very limiting, and unlikely to hold in practice. This is a clear call for unrestricting preference revelation, i.e., setting $k = m$. Of course the negative results above still apply for $k = m$ but it is likely that in this case students use their (weakly) dominant strategy, namely submitting their true preferences. Recall that in the unconstrained setting the Gale-Shapley and Top Trading Cycles mechanisms yield a stable and efficient matching, respectively. The choice for either of the two mechanisms then depends on whatever has the highest priority for the policy makers: stability or efficiency.

4.3. Manipulation by schools

The formal model of school choice only allows the students to act strategically. More precisely, the priorities and capacities of the schools are determined by law and there is no room for strategizing. Nevertheless, Abdulkadiroğlu, Pathak, and Roth (2005) noted that in the New York City school match schools acted as strategic agents by withholding some of their capacity (Sönmez, 1997). Another possibility of manipulation is through pre-arranged matches (Sönmez, 1999): a student-school pair commit to a mutually beneficial agreement prior to the centralized procedure, according to which (i) the student does not participate in the procedure and (ii) he is rewarded with a seat at the school. Here, mutually beneficial means that at least the student or the school obtains a strictly better match (and the other agent does not get hurt). Sönmez (1997, 1999) showed that any stable mechanism can be manipulated through capacity withholding and also through pre-arranged matches.

In many school districts, each school is required to admit a minimum number of students. In other words, in this extended model each school s cannot declare less than say q_s seats. To formalize the first type of manipulation we need the following piece of notation. Let P_s denotes the strict preference relation of school $s \in S$ over the (individual) students (see item 5’ in Section 3). More precisely, $f_s(i) < f_s(j)$ if and only if $iP_s j$ for all $i, j \in I$. With a slight abuse of notation, let P_s also denote the preferences of school s over sets of students. A usual assumption in the literature is that for each school $s \in S$ the preferences P_s are responsive (Roth, 1985), i.e.,

- if $i \notin I'$ and $|I'| < q_s$, then $(I' \cup \{i\})P_s I'$ if and only if $iP_s \emptyset$, and
- if $i \notin I'$ and $j \in I'$, then $((I' \setminus \{j\}) \cup \{i\})P_s I'$ if and only if $iP_s j$.

Let $P_S = (P_{s_1}, \dots, P_{s_m})$.

Definition 4.4. (Sönmez, 1997)

A mechanism φ is *non-manipulable via capacities* if for all (P_S, q) , all $s \in S$, and all $q_s < q'_s < q_s$, $\varphi(P_S, q)(s)R_s \varphi(P_S, q'_s, q_{-s})(s)$. \triangle

Theorem 4.10. (Kesten, 2008b)

The Boston and Top Trading Cycles mechanisms are non-manipulable via capacities. The Gale-Shapley mechanism is non-manipulable via capacities if and only if f is an Ergin-acyclic priority structure.

The second type of manipulation by schools is formalized as follows.

Definition 4.5. (Sönmez, 1999)

A mechanism φ is *non-manipulable via pre-arranged matches* at (I, P_I, P_S, q) if there is a student $i \in I$ and a school $s \in S$ such that $sR_i \varphi(I, P_I, P_S, q)(i)$ and $\left(\{i\} \cup \varphi(I \setminus \{i\}, P_{I \setminus \{i\}}, P_S^{I \setminus \{i\}}, q_{-s}, q_s - 1)(s) \right) R_s \varphi(I, P_I, P_S, q)(s)$ with at least one of the relations holding strictly. \triangle

Here, $P_S^{I \setminus \{i\}}$ denotes the preferences of the schools over the set of students $I \setminus \{i\}$. As the following result shows, it is virtually impossible to avoid manipulation via pre-arranged matches.

Theorem 4.11. (Kesten, 2008b)

Suppose that at (I, P_I, P_S, q) for some school $s \in S$, $q_s < n$. Then, any mechanism is manipulable via pre-arranged matches at some problem.

Kojima (2007) studies the same two kinds of manipulation. As Kojima (2007) points out, there are two differences between his and Kesten's (2008b) paper. First, Kojima (2007) follows the literature on school choice by assuming that the schools' priorities (or preferences) are publicly known. Kesten (2008b) assumes that the priorities are private information. Second, Kojima (2007) obtains conditions in terms of preferences of an individual school under which that particular school cannot manipulate. Clearly, Kesten's results (Theorems 4.10 and 4.11) deal with conditions on the entire priority structure such that no school can manipulate.

Definition 4.6. (Konishi and Ünver, 2006)
Preference relation P_s is *strongly monotone in population* if, if $q_s > |I'| > |I''|$ and each student $i \in I'$ is acceptable (i.e., $iP_s\emptyset$), then $I'P_sI''$. \triangle

The following two results show that the class of strongly monotone preferences in population is a maximal domain for non-manipulability via capacities of the Gale-Shapley mechanism.

Theorem 4.12. (Konishi and Ünver, 2006)
If P_s is *strongly monotone in population*, then s cannot manipulate the Gale-Shapley mechanism via capacities.

Theorem 4.13. (Kojima, 2007)
Fix $I, S, s \in S, P_s$, and q_s . If P_s is not *strongly monotone in population*, then there exist preferences of students and other schools (P_I, P_{-s}) such that s can manipulate the Gale-Shapley mechanism via capacities. The preferences of the other schools can be taken as *strongly monotone in population*.

Kojima (2007) also identifies a maximal domain for the second type of manipulation.

Definition 4.7. (Kojima, 2007)
Preference relation P_s is *weakly maximin* if $[q_s = |I'| = |I''|]$, each student $i \in I'$ is acceptable, and the least preferred student in I' is strictly preferred to the least preferred student in I'' implies $I'P_sI''$. \triangle

Theorem 4.14. (Kojima, 2007)

(i) If P_s is *weakly maximin*, then s cannot manipulate the Gale-Shapley mechanism via pre-arranged matches.

(ii) Fix $I, S, s \in S, P_s$, and q_s . If P_s is not *weakly maximin*, then there exist preferences of students and other schools (P_I, P_{-s}) such that s can manipulate the Gale-Shapley mechanism via pre-arranged matches. The preferences of the other schools can be taken as *weakly maximin*.

4.4. Further issues

There are many other important issues and new developments in the field. I just mention three. Abdulkadiroğlu and Ehlers (2006) study how in practice one can assign students to school while maintaining racial and ethnic balance. They introduce a notion of fairness and show that there is always a constrained non-wasteful matching that satisfies it. On the other hand, they prove that there is no such mechanism that is also strategy-proof.

Kesten (2008a) provides theoretical and computational evidence that the Gale-Shapley mechanism may suffer large welfare losses. He proposes an adjustment such that a student's waiving his priority for a particular school leads to a Pareto improvement. He further shows that the adjustment practically does not disrupt strategy-proofness.

Abdulkadiroğlu, Che, and Yasuda (2008) expand the set of strategies by allowing students to "signal" a school (in addition to a preference list). They introduce a new mechanism and show that it improves upon the Gale-Shapley mechanism.

5. Concluding remarks

It has become clear that matching theory and mechanism design can provide a better understanding of several real-life markets and help to improve their working.¹⁰ The case of school choice is a clear example. The assistance of economists in the design of school choice programs has led to student assignment mechanisms that are considered fair or efficient. Additionally, the new mechanisms have also taken away concerns of the parents since they no longer have to strategize and can simply submit their true preferences. As an illustration, the Institute for Innovation in Public School Choice, which

¹⁰See, for instance, Roth, 2008b.

¹¹For further information and developments see <http://iipsc.org/index.htm> or Al Roth's page.

is a nonprofit organization in the US, makes use of the know-how of economists in the field of market design.¹¹

On the other hand, recent literature shows there is still room for further improvements in student assignment mechanisms. I mentioned for instance the presence of a cap on the length of submittable preference lists is harmful, and there is no clear reason to not remove it. It is also necessary to take care of the ties in the priority structure. All of this could lead to additional social welfare. An important but difficult task for “economic engineers” is to convince authorities how one should deal with these and other market failures. One difficulty is that authorities or clearinghouses may not always be eager to share information about the exact procedures or cannot reveal the (submitted) preferences of the participants. Finally, groups of interest may be resistant against redesign. For the case of school choice, Pathak and Sönmez (2008a) identified groups of parents that invested in learning about the Boston mechanism. These parents obtained a clear advantage over the other participants, and opposed changing the mechanism.

The interaction between practical problems and theory leads also to new interesting theoretical problems. One challenge is to model, study, and compare different informational environments (that correspond to more realistic settings). Another challenge is to find out how well the mechanisms perform. For instance, if a mechanism is manipulable, inefficient, or unstable, how manipulable, inefficient, or unstable is it really?

References

- [1] Abdulkadiroğlu, A. Y.-K. Che, and Y. Yasuda (2008) “Expanding Choice in School Choice,” Mimeo, Duke University.
- [2] Abdulkadiroğlu, A. and L. Ehlers (2006) “Controlled School Choice,” Mimeo, CIREQ, Université de Montréal.
- [3] Abdulkadiroğlu, A., P.A. Pathak, and A.E. Roth (2005) “The New York City High School Match,” *American Economic Review, Papers and Proceedings*, **95**, 364–367.
- [4] Abdulkadiroğlu, A., P.A. Pathak, and A.E. Roth (2008) “Strategy-proofness versus Efficiency in Matching with Indifferences: Redesigning the NYC High School Match,” Mimeo, Harvard University.
- [5] Abdulkadiroğlu, A., P.A. Pathak, A.E. Roth, and T. Sönmez (2005) “The Boston Public Schools Match,” *American Economic Review, Papers and Proceedings*, **95**, 368–371.
- [6] Abdulkadiroğlu, A., P.A. Pathak, A.E. Roth, and T. Sönmez (2006) “Changing the Boston School Choice Mechanism: Strategy-Proofness as Equal Access,” Mimeo, Boston College and Harvard University.
- [7] Abdulkadiroğlu, A. and T. Sönmez (2003) “School Choice: A Mechanism Design Approach,” *American Economic Review*, **93**, 729–747.
- [8] Balinski, M. and T. Sönmez (1999) “A Tale of Two Mechanisms: Student Placement,” *Journal of Economic Theory*, **84**, 73–94.
- [9] Biró, P. (2008) “Higher Education Admission in Hungary by a Score-limit Algorithm,” Mimeo, University of Glasgow.
- [10] Calsamiglia, C. G. Haeringer, and F. Klijn (2007) “Constrained School Choice: An Experimental Study,” Mimeo, Universitat Autònoma de Barcelona.
- [11] Chen, Y. and T. Sönmez (2006) “School Choice: An Experimental Study,” *Journal of Economic Theory*, **127**, 202–231.
- [12] Erdil, A. and H. İ. Ergin (2008) “What’s the Matter with Tie-Breaking? (Improving Efficiency in School Choice),” *American Economic Review*, **98**, 669–689.
- [13] Ergin, H. İ. (2002) “Efficient Resource Allocation on the Basis of Priorities,” *Econometrica*, **70**, 2489–2497.
- [14] Ergin, H. İ. and T. Sönmez (2006) “Games of School Choice under the Boston Mechanism,” *Journal of Public Economics*, **90**, 215–237.
- [15] Gale, D. and L.S. Shapley (1962) “College Admissions and the Stability of Marriage,” *American Mathematical Monthly*, **69**, 9–15.

- [16] Gusfield, D. and R.W. Irving (1989) *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*. MIT Press, Cambridge.
- [17] Haeringer, G. and F. Klijn (2007) "Constrained School Choice," *Barcelona Economics Working Paper* 294.
- [18] Kesten, O. (2006) "On Two Competing Mechanisms for Priority-Based Allocation Problems," *Journal of Economic Theory*, **127**, 155–171.
- [19] Kesten, O. (2008a) "An Alternative Mechanism Design Approach to School Choice in the US," Mimeo, Tepper School of Business, Carnegie Mellon University.
- [20] Kesten, O. (2008b) "On Two Kinds of Manipulation for School Choice Problems," Mimeo, Tepper School of Business, Carnegie Mellon University.
- [21] Kojima, F. (2007) "When can Manipulations be Avoided in Two-Sided Matching Markets? Maximal Domain Results," *The B.E. Journal of Theoretical Economics* (contribution), Article 32.
- [22] Kojima, F. (2008) "Games of School Choice under the Boston Mechanism with General Priority Structures," *Social Choice and Welfare*, **31**, 357–365.
- [23] Konishi, H. and U. Ünver (2006) "Games of Capacity Manipulation in Hospital-Intern Markets," *Social Choice and Welfare*, **27**, 3–24.
- [24] Pathak, P.A. (2007) "Lotteries in Student Assignment," Mimeo, MIT.
- [25] Pathak, P.A. and T. Sönmez (2008a) "Leveling the Playing Field: Sincere and Strategic Players in the Boston Mechanism," *American Economic Review*, **98**, 1636–1652.
- [26] Pathak, P.A. and T. Sönmez (2008b) "Comparing Mechanisms by their Vulnerability to Manipulation," Mimeo, MIT.
- [27] Romero-Medina, A. (1998) "Implementation of Stable Solutions in a Restricted Matching Market," *Review of Economic Design*, **3**, 137–147.
- [28] Roth, A.E. (1985) "The College Admissions Problem is not Equivalent to the Marriage Problem," *Journal of Economic Theory*, **36**, 277–288.
- [29] Roth, A.E. (1990) "New Physicians: A Natural Experiment in Market Organization," *Science*, **250**, 1524–1528.
- [30] Roth, A.E. (2002) "The Economist as Engineer: Game Theory, Experimentation, and Computation as Tools for Design Economics," *Econometrica*, **70**, 1341–1378.
- [31] Roth, A.E. (2008a) "Deferred Acceptance Algorithms: History, Theory, Practice, and Open Questions," *International Journal of Game Theory*, **36**, 537–569.
- [32] Roth, A.E. (2008b) "What have We Learned from Market Design?," (Hahn Lecture) *Economic Journal*, **118**, 285–310.
- [33] Roth, A.E. and E. Peranson (1999) "The Redesign of the Matching Market for American Physicians: Some Engineering Aspects of Economic Design," *American Economic Review*, **89**, 748–780.
- [34] Roth, A.E. and M.A.O. Sotomayor (1990) *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*. Econometric Society Monograph Series, Cambridge University Press, New York.
- [35] Shapley, L.S. and H. Scarf (1974) "On Cores and Indivisibility," *Journal of Mathematical Economics*, **1**, 23–37.
- [36] Sönmez, T. (1997) "Manipulation via Capacities in Two-Sided Matching Markets," *Journal of Economic Theory*, **77**, 197–204.
- [37] Sönmez, T. (1999) "Can Pre-arranged Matches be avoided in Two-Sided Matching Markets," *Journal of Economic Theory*, **86**, 148–156.
- [38] Sotomayor, M.A.O. (1998) "The Strategy Structure of the College Admissions Stable Mechanisms," Mimeo, Universidade de São Paulo.
- [39] Teo, C.-P., J. Sethuraman, and W.-P. Tan (2001) "Gale-Shapley Stable Marriage Problem Revisited: Strategic Issues and Applications," *Management Science*, **47**, 1252–1267.

3. ESTADÍSTICA OFICIAL

TIME-REVERSION OF VARMA PROCESSES BY POLYNOMIAL METHODS

Félix Aparicio Pérez*

Instituto Nacional de Estadística

Victor Gómez Enríquez

Ministerio de Economía

Abstract

Time-reversion is a well known technique that is used in time series analysis since Box and Jenkins (1970) proposed to compute unconditional least-squares estimations by backcasting. However, in a multivariate setting its application relies on a state space formulation of the time series model and the use of some results about reversion in time of Markov processes. Given a VARMA process, this paper proposes a new polynomial methodology that can be used to provide a model for the time-reversed process. A simple example is provided and some possible applications and extensions are also included.

Keywords: VARMA, time-reversion, echelon form, backcasting

1. Introducción

La inversión en el tiempo de modelos lineales de series temporales se utiliza desde los tiempos de Box y Jenkins (1970). Ellos proponían la aplicación de una técnica, llamada backcasting, para estimar un modelo de series temporales univariante mediante mínimos cuadrados incondicionales, como mejor aproximación a la estimación de máxima verosimilitud que los mínimos cuadrados condicionales. El backcasting consiste en predecir el proceso invertido en el tiempo (hacia el pasado), para después volver al proceso con el tiempo sin invertir y, recursivamente, estimar los valores suavizados de los errores del modelo. Estos errores suavizados se utilizan en la estimación por mínimos cuadrados incondicionales.

Hoy día, es posible estimar un modelo de series temporales multivariante VARMA mediante máxima verosimilitud exacta, por ello la utilidad del backcasting es más reducida. Sin embargo, existen otras aplicaciones de interés, que explicamos en la sección 4. En el caso univariante, como es bien conocido, la dinámica que sigue un proceso ARMA estacionario al invertirlo en el tiempo es la misma que la del proceso original. Sin embargo, en el ca-

so multivariante la dinámica de un proceso y del que resulta de invertir el tiempo en él son distintas. Quizás por este motivo, hasta el presente, todas las aplicaciones de que tenemos constancia de procesos VARMA invertidos en el tiempo utilizan la expresión en forma de espacio de estado del modelo. Se basan en que el proceso así expresado se puede considerar generado por un proceso de Markov y utilizan las fórmulas para invertir en el tiempo un proceso markoviano, ver por ejemplo Caines (1988) p. 237 o la sección 5.9 de Aoki (1989).

Sin embargo, es posible obtener la dinámica de un proceso VARMA invertido en el tiempo enteramente mediante técnicas polinomiales, sin recurrir a expresar el modelo con la ayuda de los procesos markovianos. La utilización de uno u otro tipo de técnicas dependerá, por tanto, de las preferencias e intereses del investigador, así como de la disponibilidad de software para cálculos de espacio de estado o polinomiales.

2. Metodología propuesta

Sea y_t un proceso VARMA(p,q) de dimensión k que sigue el modelo $a(B)y_t = b(B)\epsilon_t$, donde $a(z)$ y $b(z)$ representan matrices polinomiales de gra-

*Corresponding Author. E-mail: fapape@ine.es

dos p y q respectivamente y ϵ_t es un ruido blanco gaussiano multivariante con matriz de covarianzas $Cov(\epsilon_t) = \Sigma$. Suponemos que el modelo cumple las hipótesis de estacionariedad e invertibilidad y que es coprimo por la izquierda. Llamaremos B y F a los operadores unitarios de retardo y adelante en el tiempo respectivamente ($By_t = y_{t-1}$, $Fy_t = y_{t+1}$). A veces anotaremos $a(z) = A_0 + A_1 \cdot z + \dots + A_p \cdot z^p$ y análogamente para $b(z)$ y otras matrices polinomiales.

El método propuesto se basa en el resultado bien conocido de que la función de autocovarianza de un proceso VARMA estacionario cumple la propiedad $\Gamma_k \triangleq Cov(y_{t+k}, y_t) = Cov(y_t, y_{t+k})' \triangleq \Gamma_k', \forall k \in \mathbb{Z}$. De aquí podemos deducir inmediatamente que el proceso invertido en el tiempo será también estacionario con autocovarianzas iguales a las traspuestas de las del proceso original. En cuanto a la notación, en este trabajo llamaremos \tilde{y}_t al proceso invertido en el tiempo, teniendo en cuenta que, en realidad, no estamos haciendo ningún cambio de variable en t y que, por tanto, $\tilde{y}_t \equiv y_t$. La diferencia es que, en los modelos en que aparezca \tilde{y}_t , utilizamos el operador F y siempre que usemos la notación \tilde{y}_t está implícito el que el tiempo corre hacia atrás.

Se trata, por tanto, de encontrar el modelo de un proceso que tenga autocovarianzas iguales a las traspuestas de las del proceso original. Por ejemplo, en Reinsel (1993) apéndice A2.2, se explica cómo obtener los parámetros de un proceso VARMA a partir de sus autocovarianzas. Podría parecer que esto resuelve el problema, sin embargo, utilizando ese método no está garantizado el que lleguemos a una solución única y bien definida en todos los casos, esto solo será así si se cumplen ciertas condiciones de rangos. Nosotros daremos un método general para obtener la parte autorregresiva que funcione sin que se tengan que cumplir condiciones adicionales.

La idea no es complicada: se trata de obtener la parte autorregresiva en forma canónica echelon. Para ello utilizamos la matriz de Hankel formada por las autocovarianzas de \tilde{y}_t , es decir por las traspuestas de las autocovarianzas de y_t . Este método funcionará para cualesquiera que sean los índices de kronecker del modelo que siga \tilde{y}_t , sin condiciones adicionales. Una vez tengamos la parte autorregresiva ya podemos seguir el procedimiento clásico de obtener la parte de medias móviles mediante fac-

torización espectral de las autocovarianzas que resultan de aplicar el filtro finito dado por la parte autorregresiva a \tilde{y}_t .

Para comprender este proceso es necesario estar familiarizado con la forma canónica echelon de un proceso VARMA; por ejemplo en la sección 2.5 de Hannan y Deistler (1988), o en Tsay (1991) se explica esta forma canónica en detalle.

Brevemente, si formamos la matriz de Hankel finita con $r = \max(p, q) + 1$ bloques de filas y columnas que contengan las autocovarianzas de \tilde{y}_t , es decir

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} \Gamma(1)' & \Gamma(2)' & \dots & \Gamma(r)' \\ \Gamma(2)' & \Gamma(3)' & \dots & \Gamma(r+1)' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma(r)' & \Gamma(r+1)' & \dots & \Gamma(2r-1)' \end{bmatrix}.$$

y buscamos, en orden natural, $(1, 2, \dots, kr)$, las filas de \bar{H} que son linealmente independientes (l.i.) de las anteriores, los índices de kronecker son un vector de longitud k que tiene por componente i el número total de filas i -ésimas de los distintos bloques que han resultado ser l.i. en esta búsqueda.

Existe otra definición de esta misma matriz de Hankel a partir de los $K_i, i \in 1, \dots, r$, que son los r primeros pesos en la representación de Wold del proceso. No es complicado demostrar que las relaciones lineales entre las filas de ambas matrices de Hankel son las mismas, por lo que se obtiene el mismo resultado utilizando cualquiera de ellas.

Se llama grado de McMillan a la suma de estos índices de kronecker y su interpretación puede ser tanto la dimensión del espacio vectorial de las predicciones del proceso (Tsay (1991)) como la dimensión del estado en una representación de dimensión mínima del proceso en forma de espacio de estado (Hannan y Deistler (1988), Teorema 2.4.1).

Una vez conocidos los índices de kronecker existen fórmulas para obtener la parte autorregresiva (AR) de la forma canónica del proceso, p. ej. en Hannan y Deistler (1988) sec. 2.5 se explica un procedimiento. Sea $a^*(z)$ la parte AR de la forma echelon obtenida. Para calcular la parte de medias móviles (MA) de \tilde{y}_t procedemos por factorización espectral, puesto que es muy sencillo obtener las autocovarianzas de $u_t = a^*(F)\tilde{y}_t$ por ser este un filtro autorregresivo finito de \tilde{y}_t . Llamaremos $\Gamma_u(j)$ a las autocovarianzas de u_t . Como u_t es una media móvil finita, su función generatriz de covarianzas será de

la forma $G_u(z) = \sum_{j=-v}^v \Gamma_u(j)z^j$. Aplicando factorización espectral a $G_u(z)$ con la condición de que $A_0^* = B_0^*$ (para obtener un proceso VARMA en la forma habitual), obtendremos la parte MA $b^*(z)$, un nuevo ruido blanco gaussiano a_t y $\Sigma_a = Cov(a_t)$ tales que el proceso \tilde{y}_t siga el modelo

$$a^*(F)\tilde{y}_t = b^*(F)a_t, \quad (2.1)$$

en el cual el tiempo corre hacia atrás.

El modelo (1) obtenido puede que tenga A_0^* distinta de la matriz identidad, aunque siempre será una matriz triangular inferior con unos en la diagonal. Si necesitamos el modelo para hacer predicciones podemos transformarlo premultiplicando (1) por $(A_0^*)^{-1}$.

3. Un ejemplo sencillo

Sea el proceso VARMA(1,1) $a(B)y_t = b(B)\epsilon_t$, con

$$a(z) = \begin{bmatrix} 1 + 0,5z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b(z) = \begin{bmatrix} 1 + 0,2z & 0,3z \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Cov(\epsilon_t) = I_2.$$

Las primeras autocovarianzas del proceso son

$$\Gamma(0) = \begin{bmatrix} 1,24 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma(1) = \begin{bmatrix} -0,42 & 0,3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma(2) = \begin{bmatrix} 0,21 & -0,15 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma(3) = \begin{bmatrix} -0,105 & 0,075 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los índices de kronecker del proceso son (1, 0), pues si formamos la matriz de Hankel con $\Gamma(j), j \in 1, 2, 3$ vemos en seguida que sus filas segunda y tercera son c.l. de la primera. Ahora nos interesa la matriz de Hankel del proceso invertido en el tiempo, este proceso tendrá como autocovarianzas las traspuestas de las de y_t y, por tanto, la matriz de Hankel será

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} -0,42 & 0 & 0,21 & 0 \\ 0,3 & 0 & -0,15 & 0 \\ 0,21 & 0 & -0,105 & 0 \\ -0,15 & 0 & 0,075 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por la misma razón que antes los índices de kronecker del proceso son también (1, 0). Se obtiene el proceso $a^*(F)\tilde{y}_t = b^*(F)a_t$, con

$$a^*(z) = \begin{bmatrix} 1 + 0,5z & 0 \\ 5/7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para obtener la parte de medias móviles, calcularemos las autocovarianzas del filtro autorregresivo finito $u_t = a^*(F)\tilde{y}_t$, dadas las de \tilde{y}_t , estas son (aproximadamente):

$$\Gamma_u(0) = \begin{bmatrix} 1,13 & 0,89 \\ 0,89 & 1,63 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_u(1) = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,14 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_u(j) = 0, \forall j > 1$$

Aplicamos factorización espectral a $\Gamma_u(1)'z^{-1} + \Gamma_u(0) + \Gamma_u(1)z$ con la condición de que $B_0^* = A_0^*$ y obtenemos (aproximadamente):

$$b^*(z) = \begin{bmatrix} 1 + 0,185z & -0,021z \\ 5/7 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_a = \begin{bmatrix} 1,093 & 0,105 \\ 0,105 & 0,925 \end{bmatrix}.$$

Naturalmente, si calculamos las autocovarianzas de \tilde{y}_t obtendremos las traspuestas de las de y_t .

Para trabajar numéricamente con un proceso invertido en el tiempo es mas cómodo hacer un cambio de variable del tipo $s = T + 1 - t$ (suponiendo que tengamos una serie $\mathbf{Y} = y_1, \dots, y_T$ de longitud finita T) y, llamando $z_s = y_{T+1-t}$ y $b_s = a_{T+1-t}$ escribir el modelo (1) en la forma $a^*(B)z_s = b^*(B)b_s$, es decir, poner los datos de final a principio y trabajar con ellos con el operador B , pues el nuevo tiempo s corre hacia adelante.

4. Algunas aplicaciones

Como ya dijimos, el backcasting, que era la aplicación clásica de un proceso ARMA invertido en el tiempo, no es tan importante en la actualidad. Sin embargo, en el proceso de realización de backcasting se obtienen los errores del modelo suavizados $\hat{\epsilon}_t = E[\epsilon_t/\mathbf{Y}]$. Para obtener los $\hat{\epsilon}_t$ hay que estimar primero las innovaciones del proceso (1) (por ejemplo, mediante el algoritmo de las innovaciones, ver Brockwell y Davis (1991), sec. 11.4), para predecir con (1) y_0, \dots, y_{-M} con M suficientemente grande y, volviendo al modelo original de y_t , se obtienen

recursivamente los $\hat{\epsilon}_t$ (iniciando la recursión con ceros) con una precisión arbitraria (mayor cuanto mas grande hayamos tomado M).

Otra aplicación obvia es la estimación de los valores anteriores a la serie observada, que se obtiene mediante los dos primeros pasos del proceso que acabamos de describir para estimar los $\hat{\epsilon}_t$.

También es de utilidad el proceso invertido en el tiempo en la simulación de trayectorias de un proceso VARMA con condiciones finales dadas, pues esas condiciones finales se convierten en iniciales en el proceso invertido en el tiempo.

Otras aplicaciones surgen en la discretización de ecuaciones diferenciales estocásticas (lineales o linealizadas) invertidas en el tiempo. Este tipo de ecuaciones son importantes en matemática financiera y otras aplicaciones.

Todos estos procesos se pueden realizar también expresando el modelo VARMA en forma de espacio de estado, por lo cual, como decíamos antes, el analista podrá escoger entre los dos enfoques.

La técnica que hemos explicado en este trabajo también puede extenderse al caso en que tengamos otras variables o inputs exógenos (VARMAX).

Referencias

- [1] Aoki, M. (1989), *Optimization of Stochastic Systems: Topics in Discrete Time Dynamics (2nd. ed)*, New York:Academic Press.
- [2] Box, G.E.P., y Jenkins, G.M. (1970), *Time Series: Theory and Methods (2nd. ed)* New York: Springer-Verlag.
- [3] Brockwell, P.J., y Davis, R.A. (1991), *Time Series Analysis, Forecasting and Control* San Francisco: Holden-Day.
- [4] Caines, P.E. (1988), *Linear Stochastic Systems* New York: John Wiley.
- [5] Hannan, E.J. y Deistler, M. (1988), *The Statistical Theory of Linear Systems* New York: John Wiley.
- [6] Reinsel, G.C. (1993), *Elements of Multivariate Time Series Analysis (2nd. ed)* New York: Springer-Verlag.
- [7] Tsay, R.S. (1991), "Two Canonical Forms for Vector ARMA Processes", *Statistica Sinica*, **1**, 247-269.

4. HISTORIA Y ENSEÑANZA

SMALLPOX AND THE MEMORY OF D. BERNOULLI. AN EARLY EXAMPLE OF APPLIED STATISTICS

José Antonio Camúñez Ruiz*, Francisco Javier Ortega Irizo

Departamento de Economía Aplicada I
Universidad de Sevilla

Abstract

An early example of application of the statistics to a real problem of epidemiology can be found in the Memory presented by D. Bernoulli in the Academy of the Sciences of Paris, in 1760, supporting inoculation as a preventive system against the smallpox. From the life table of Halley, and proposing a mathematical model of behavior of the disease, Bernoulli presents another one for a free population of smallpox and does a comparison between them and between their life expectancies.

In this article we analyze and value the content of this memory using, in addition, a more ordinary and nearby language.

Keywords: Smallpox, Inoculation, Life Table, History of the Probability and Statistics, 18th century.

1. La inoculación contra la viruela

La viruela es una enfermedad infecciosa muy contagiosa, de origen viral y que ha sido totalmente erradicada desde 1977. La viruela fue una plaga terrible y temida. Las estimaciones (con poca base científica) situaban su mortalidad en una tasa de un enfermo de cada ocho o incluso mayor, según el momento del análisis. La enfermedad siempre quedó fuera del alcance de un tratamiento eficaz, siendo el único remedio contra ella el de la vacunación.

Previo a la vacunación se usó una técnica conocida como “inoculación” o “variolorización”. Tenía mayor riesgo que la vacunación, y tuvo su auge en Europa durante el siglo XVIII. Ese riesgo inherente dio lugar a una importante serie de investigaciones y discusiones por parte de médicos, matemáticos, estadísticos y, en general, pensadores, a lo largo de dicho siglo, hasta la aparición de la vacuna, a principios del XIX. La nómina de investigadores sobre el asunto es extensa para ese periodo. Así, podemos citar, además de la Memoria de Daniel Bernoulli, las investigaciones de Charles Marie de La Condamine (1701-1774), Jean le Rond D’Alembert (1717-1783), Johann Heinrich Lambert (1728-1777), Jean Trembley (1749-1811), Emmanuel Étienne Du-

villard (1755-1832) y Joshua Milne (1776-1851). Un repaso breve de todos estos trabajos lo podemos encontrar en Daw R. H. (1979). Fagot-Largeault (1989) hace una amplia descripción de trabajo de los autores franceses, en particular de La Condamine.

Asociado a la viruela aparece el término “variolosa”, palabra derivada del latín “varus” que significa pústula. El contagio de la enfermedad es directo, de humano a humano, pues no existen reservorios animales. La entrada del virus se produce normalmente a través de las vías respiratorias. El periodo de incubación es de 10 a 14 días. Aparecen escalofríos, fiebres, dolor de cabeza, náuseas... Tras estos síntomas se produce la erupción, caracterizada por la aparición de manchas rojas sobre la piel, que se convierten en vesículas, después en pústulas llenas de pus, dolorosas, densas y redondas, para acabar formando costras. Estas manifestaciones aparecen primero en la mucosa de la boca y faringe, luego en la cara y extremidades, para pasar después al tronco, a las palmas de las manos y pies. Las costras aparecen cerca del octavo o noveno día de evolución y, cuando se desprenden, dejan una cicatriz en la piel. Por tanto, es una enfermedad deformante que deja sus huellas para toda la vida. Las marcas

*Corresponding Author. E-mail: camunez@us.es

de viruela se observan en el 70 % de los supervivientes siendo las lesiones en el rostro las que prevalecen por la tendencia a la infección de las glándulas sebáceas. La enfermedad, si no mata al paciente, es inmunizante: cualquier infección por el mismo virus es imposible durante años.

Como primera práctica para erradicar el mal se usó la “inoculación”, que consistía en introducir un hilo de seda impregnado de pus tomada de una pústula de viruela de alguien que sufriese la enfermedad, en una ligera incisión hecha en el brazo de la persona a inocular. El hilo era retirado al cabo de dos días. Se preparaba al paciente con una dieta ligera y se le aislaba durante una semana justo hasta que un breve acceso de fiebre junto con una erupción local marcaba la aparición de la enfermedad “artificial”. El procedimiento era arriesgado, pues los inoculados podían acabar falleciendo por la propia enfermedad, contraída en este caso de forma voluntaria. Había estimaciones diversas, nada coincidentes, de la tasa de ese riesgo.

La técnica era muy antigua en China y se fue difundiendo a lo largo de la ruta de la seda hacia Europa Occidental a principios del siglo XVIII. La técnica prevaleció hasta que E. Jenner (1749-1823) descubrió en 1796 la vacuna (una especie de inoculación con viruela de vaca) como método mucho menos arriesgado (Jenner, 1798).

2. La memoria de Daniel Bernoulli

El 30 de abril de 1760, D. Bernoulli (1700-1782) leyó una memoria en la Real Academia de las Ciencias de París titulada *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir*, la cual, sin embargo, no fue publicada hasta 1765. Esto no fue, seguramente, por azar teniendo en cuenta que d'Alembert, que ocupaba en la Academia una posición influyente, consiguió hacer publicar la suya en 1761. Este último criticó la solución del problema de la inoculación dado por “un sabio geómetra”, sin nombrar a D. Bernoulli. Hemos de reconocer, sin embargo, que otras memorias leídas en la Academia en ese período también sufrieron retraso en su publicación. Por ejemplo, la de Trembley fue leída en 1796 y publicada en 1799.

D'Alembert (1761) no coge el punto de vista de la colectividad, sino únicamente el del individuo que debe elegir entre el riesgo inmediato de la inocula-

ción, y el riesgo más distante de la enfermedad: se goza mejor de la vida cuando se es joven, dice él, y una ganancia de tres o cuatro años de vida media, perspectiva lejana (¿años de vejez?) no es suficiente para justificar que se exponga a morir en pocos días de una inoculación voluntaria.

D. Bernoulli, añadió una “Introducción Apolo-gética” para la publicación de 1765. En ella declara que no estaba *sorprendido de que al vulgo le llame poco la atención este último aspecto, pero no puedo impedir estarlo cuando veo personas de mérito y de una gran reputación, plantearse seriamente si vale la pena sufrir una operación como la inoculación, con la esperanza de prolongar su vida en dos años: sería de desear que las críticas fuesen más reservadas y más circunspectas, y sobretudo que hiciesen el esfuerzo de ponerse en el hecho de las cosas que se proponen criticar por anticipado*. Como vemos, la nota es bastante mordaz, dada la cortesía de la época. La debilidad del texto de d'Alembert viene del hecho de su resistencia a la teoría de las probabilidades. Trembley (1799) lo dice sin ambages: “ha sustituido el análisis elegante del señor Bernoulli por una teoría matemática tan fuertemente matemática, que ni él ni nadie, que yo sepa, ha hecho aplicación”. “El ilustre d'Alembert se precipita en la contienda”, dice Duvillard (1806), apuntando algunos errores en la metafísica del cálculo que extrañan en el caso de “un tan grande geómetra”, y añade una alabanza al trabajo de Bernoulli: “Este escrito, el mejor sin duda que haya sido publicado a favor de la inoculación, es notable por la finura, la precisión de las ideas, las visiones y las cosas que encierra”.

Los argumentos de d'Alembert tienen sin embargo el interés de atraer la atención sobre dos hechos: las estimaciones relativas a la esperanza de vida de una población no son más que un elemento de valoración, entre otros, cuando se razona sobre la chance de sobrevivir de un individuo dotado de una cierta constitución; y la utilidad de una determinada solución debe evaluarse no sólo con la *cantidad* de vida que ofrece, sino también con su *calidad*.

Volviendo al trabajo de Bernoulli, éste dice haber compuesto su memoria sobre la mortalidad de la viruela a petición de Maupertuis (1698-1759, matemático, astrónomo y biólogo francés, con importantes trabajos en genética), que le había confiado su proyecto de exponer “*en una misma Tabla los dos estados de la humanidad, uno tal como es efectiva-*

mente, y otro tal como sería si se pudiese eximir de la viruela todo el género humano". Así, en esta importante memoria, D. Bernoulli presentó la primera doble tabla de vida decreciente de la historia de la ciencia, proponiendo para ello un modelo matemático de comportamiento de la viruela en una población. Y el autor añade: *"Pienso que el paralelismo de esto dos estados explicaría mejor la diferencia y el contraste, que cualquier comentario más amplio, pero he sentido también la dificultad del intento; y la insuficiencia de las listas mortuorias, que no señalan la edad de aquellos que la viruela se lleva, no hace más que poner un mayor obstáculo a estos enfoques."*

Así pues, la gran debilidad de este trabajo viene de la falta de datos empíricos. El único dato contrastado con el que D. Bernoulli contaba (según las listas de Süssmilch, 1741, entre otros) es el de la proporción de mortalidad de viruela sobre el total de muertes, considerando todas las edades: *"Está constatado por una larga serie de observaciones que la viruela se lleva la treceava o catorceava parte de cada generación"*. O sea, parte del supuesto contrastado que la suma de todas las muertes de viruela hace alrededor de 1/13 del total de las muertes, o sea, 100 sobre su generación de 1300 (de hecho, su tabla suma 101). En cuanto a lo que se llamará más tarde la letalidad de la enfermedad, este autor no tiene más que estimaciones muy fragmentarias: *"Se sabe... que esta enfermedad se lleva alrededor de la octava o la séptima parte de aquellos a los que le ataca, con tal que se tome la proporción sobre un gran número de epidemias;..."* Esto le servirá de soporte sobre el que apoyará las proporciones que introducirá después.

D. Bernoulli toma como base de cálculo la tabla de mortalidad establecida por el astrónomo inglés Halley (1693) que preparó con datos de la ciudad de Breslaw, y que nuestro autor conoció a través del autor alemán Süssmilch. Esta tabla no indica el número de niños recién nacidos. Su punto de partida es el número de supervivientes a la edad de un año, que considera igual a mil. Süssmilch (1741) supone que Halley había partido de una generación de 1238 niños, estimación del número de nacimientos en Breslaw para el período considerado, y para que sobrevivan 1000 a la edad de un año. D. Bernoulli tiene presente las tablas de Buffon, publicadas en 1749, que daban una mortalidad infantil mucho

más elevada. Entonces, toma como punto de partida a la edad de cero años una cifra arbitraria de 1300 niños, intermedia entre las estimaciones de Buffon y de Süssmilch.

Falto de datos, D. Bernoulli se limita a efectuar conjeturas. Apela a los párrocos de las ciudades para que anoten las edades de los fallecidos (pag. 22 de la Memoria), a los médicos para que valoren la importancia de la inoculación (pag. 29), y afirma que el día en que se tenga listas mortuorias bien hechas, él será incluso su "más severo crítico" (pag. 4). Su método de cálculo no es, desgraciadamente, aplicable bajo hipótesis distintas a las suyas, como lo señala Trembley (1799). Pero ve claramente lo que está en juego en el problema; un conocimiento exacto de los riesgos permitiría no sólo a los particulares, sino también a los Estados, tomar decisiones racionales: *"Si se conociesen con exactitud todas las proporciones medias que se hubiesen podido determinar sobre un número muy grande de observaciones, pero bien consideradas y reflexionadas, se podría dar una teoría completa sobre los azares de la viruela: una teoría así dictaría las máximas que todo hombre razonable debe seguir"* (p. 8).

3. El modelo propuesto por D. Bernoulli

El problema planteado es encontrar una fórmula que permita obtener, a partir de la tabla de mortalidad en "el estado natural y con viruela" (una tabla donde la viruela es una de las enfermedades mortales de la humanidad), una tabla de mortalidad del "estado sin viruela" (una tabla de mortalidad en la que se ha erradicado la viruela).

Para llevar a cabo su propósito, el autor echa en falta dos conocimientos: *"Veía mejor, en primer lugar, que la realización de una idea así exige dos conocimientos elementales: ¿cuál es el riesgo anual a diferentes edades de ser sorprendido por la viruela?, ¿y cuál es el de morir para aquellos que son atacados?"*

Entonces, D. Bernoulli plantea dos principios: el primero es que "en tanto no se haya tenido la viruela, se corre continuamente el mismo riesgo de tenerla", el segundo es "que el riesgo de morir de viruela cuando se es atacado, (es)... el mismo en toda edad" (1760, Introducción, pag. 4).

En la Introducción que, como se ha dicho fue, redactada en el momento de la publicación, en 1765,

da algunos argumentos que intentan mostrar que las hipótesis elegidas son, al menos, verosímiles. El texto primitivo de la memoria insiste en el hecho de que se puede adaptar el cálculo a las condiciones locales: así, en el “pequeño país” de Bernoulli (Bâle), los médicos estimarían $1/20$ la probabilidad de morir cuando se contrae la viruela. Pero las observaciones recogidas en las “grandes ciudades” dan una probabilidad mucho mayor.

Ante la falta de datos empíricos, el autor se ve en la obligación de introducir supuestos o hipótesis con los que poder construir sus cálculos. Asume que nadie puede padecer viruela más de una vez en la vida, e introduce dos proporciones que van en consonancia con los supuestos comentados y, por tanto, considera constantes para las diferentes edades: la proporción anual de los que cogen viruela entre aquellos que nunca la han tenido es $1/n$, o sea, de cada n individuos que no hayan tenido viruela uno la coge en el plazo de un año, y que la proporción anual de muerte entre aquellos que enferman de viruela es $1/m$, o sea, de cada m individuos que enferman de viruela en el mismo año, uno de ellos fallece de esa enfermedad. Por tanto, según esto, la probabilidad de que un individuo que hasta ahora no ha padecido de viruela, muera de esa enfermedad en el plazo de un año será el producto de las dos anteriores, esto es $\frac{1}{nm}$. Escribe argumentos para mantener su hipótesis de proporcionalidad constante para aquellos que cogen la viruela en todos los tramos de edad. Concluye diciendo: *En tanto no se haya tenido la viruela se corre continuamente el mismo riesgo de tenerla. Las leyes de la Naturaleza más simples son las más verosímiles.*

Con este planteamiento, el problema es qué valores hay que dar a los dos parámetros n y m , ante lo ya comentado de ausencia de datos de enfermos y fallecidos de viruela por edades. Este asunto será motivo de discusión y de análisis entre los investigadores posteriores a Bernoulli en el siglo XVIII. Cada uno de ellos proporcionará valores distintos para n y m según los tramos de edad y en base a algunas estadísticas de las que ya se disponían.

Bernoulli propone como valores de ambos parámetros $n = m = 8$. O sea, la probabilidad de contraer la enfermedad, en el plazo de un año, para un individuo que no la ha tenido es $1/8$, para cualquiera que sea su edad, y la probabilidad de fallecer de viruela en dicho plazo es $1/64$. El autor elige porque

no contradecía al dato más sustentado que disponía de una muerte de cada 13 era debida a la viruela.

Con estas premisas se propone construir una fórmula que, bajo supuestos razonables, proporcione el número “ s ” de personas que no han tenido la viruela, de una edad “ x ”, en función de dicha edad y del número “ y ” de supervivientes. Para ello, argumenta como sigue. Los supervivientes, s , que no han tenido viruela decrecen por

- (i) aquellos que cogen viruela (muriendo o no de ello) y,
- (ii) aquellos que mueren de otras causas sin haber tenido viruela alguna vez.

En un elemento de tiempo dx el decrecimiento de s es $-ds$ (ds y dy , usado abajo, son intrínsecamente negativos y el signo menos es entonces necesario para convertirlos en números positivos). El número de atacados por viruela es $\frac{sdx}{n}$, y el número de aquellos que mueren de viruela es $\frac{sdx}{nm}$. El número total de muertes por todas las causas en un tiempo dx es $-dy$. Por tanto, el número de muertes por otras causas distintas a la viruela es $-dy - \frac{sdx}{nm}$. Pero este número relaciona a y personas, mientras que al formar una ecuación para s hemos referido el número de muertes de otras causas entre s , esto es, con $\frac{(-dy - \frac{sdx}{nm})s}{y}$ muertes.

Entonces el decremento en un tiempo dx del número de individuos que no han padecido la viruela es igual a la suma de los afectados por la misma en ese tiempo, mas los que han fallecido por otras causas distintas a la viruela:

$$-ds = \frac{sdx}{n} + \frac{(-dy - \frac{sdx}{nm})s}{y}$$

Por tanto $\frac{sdy - yds}{s^2} = \frac{ydx}{sn} - \frac{dx}{nm}$. Poniendo $\frac{y}{s} = r$, por lo que $dr = \frac{sdy - yds}{s^2}$. Entonces, $nm \cdot dr = mr \cdot dx - dx$, o $dx = \frac{nm \cdot dr}{mr - 1}$. Integrando da $n \ln(mr - 1) = x + c$, donde c es una constante a determinar, o $n \ln(\frac{my}{s} - 1) = x + c$. Ahora, cuando $x = 0$, $y = s$, lo que da

$$c = n \ln(m - 1)$$

Y de aquí

$$n \ln\left(\frac{my}{s} - 1\right) = x.$$

Entonces

$$\frac{my}{s} - 1 = (m - 1)e^{\frac{x}{n}}$$

Por tanto

$$s = \frac{m}{1 + (m - 1)e^{\frac{x}{n}}}y \quad (3.1)$$

Para los valores que Bernoulli estableció para m y n , la fórmula queda

$$s = \frac{8}{7e^{\frac{x}{8}} + 1}y$$

Con esto, el autor construye la Tabla 1 de su memoria, donde en la primera columna aparece la edad (lo que hemos llamado x); en la segunda, el número de supervivientes a esa edad según la tabla de Halley (lo que hemos llamado y); en la tercera, número de personas que han llegado a esa edad sin haber padecido aún la viruela (lo que hemos llamado s), habiendo sido calculado ese número mediante la fórmula última; en la cuarta, el número de indi-

viduos que, a esa edad, ya han padecido viruela y se han recuperado (supervivientes de la enfermedad), o sea $y - s$; en la quinta, el número de enfermos de viruela de ese año, por tanto, $\frac{1}{8}s$, pero para mayor exactitud toma para s la media entre los valores de esa cantidad para ese año y el anterior, o sea, construye la 5ª columna calculando $\frac{1}{8} \times \frac{s_{x-1} + s_x}{2}$; en la sexta, el número de fallecidos de viruela ese año: un octavo de los valores de la quinta columna; en la séptima, las muertes acumuladas de viruela desde 0 años hasta ese año y, por último, en la octava, las muertes por otras causas distintas a la viruela, o sea, $y_{x-1} - y_x - \text{columna } 6$. La Tabla se construye hasta la edad de 24 años porque, como se ha dicho, para esa edad, pocos de los que sobreviven no han padecido la enfermedad.

Tabla 1.

Edad por años	Supervivientes según Halley	No habiendo tenido la viruela	Habiendo tenido la viruela	Cogiendo la viruela durante cada año	Muertes de viruela cada año	Suma de muertes de viruela	Muertes de otras enfermedades cada año
0	1300	1300	0				
1	1000	896	104	137	17'1	17'1	283
2	855	685	170	99	12'4	29'5	133
3	798	571	227	78	9'7	39'2	47
4	760	485	275	66	8'3	47'5	30
5	732	416	316	56	7'0	54'5	21
6	710	359	351	48	6'0	60'5	16
7	692	311	381	42	5'2	65'7	12'8
8	680	272	408	36	4'5	70'2	7'5
9	670	237	433	32	4'0	74'2	6
10	661	208	453	28	3'5	77'7	5'5
11	653	182	471	24'4	3'0	80'7	5
12	646	160	486	21'4	2'7	83'4	4'3
13	640	140	500	18'7	2'3	85'7	3'7
14	634	123	511	16'6	2'1	87'8	3'9
15	628	108	520	14'4	1'8	89'6	4'2
16	622	94	528	12'6	1'6	91'2	4'4
17	616	83	533	11'0	1'4	92'6	4'6
18	610	72	538	9'7	1'2	93'8	4'8
19	604	63	541	8'4	1'0	94'8	5
20	598	56	542	7'4	0'9	95'7	5'1
21	592	48'5	543	6'5	0'8	96'5	5'2
22	586	42'5	543	5'6	0'7	97'2	5'3
23	579	37	542	5'0	0'6	97'8	6'4
24	572	32'4	540	4'4	0'5	98'3	6'5

Resulta de las tablas calculadas por D. Bernoulli que en el estado natural, para una generación de 1300 recién nacidos, 500 morirán sin haber contraído la viruela, 700 la cogerán y morirán de otra cosa y 100 cogerán la viruela y morirán por culpa de ella (o sea, 1/13 del total de fallecidos, dato con el cual contaba el autor). La mitad de estos últimos, mueren antes de los cinco años.

A continuación, nuestro autor considera lo que ocurriría si todos fuesen inoculados al nacer y, entonces, la viruela fuese erradicada como causa de muerte. Eso le permite preparar una tabla de vida para el caso en que no hubiese muerte por viruela. Ilustramos el método de construcción de esta segunda tabla usando los números de la Tabla 1:

En el primer año de vida hay 17'1 muertes de

viruela, así que, sin viruela, el número de los que sobreviven un año crecerá de 1000 a 1017'1.

Si 133 (columna 8) mueren durante el segundo año de otras causas distintas a la viruela entre los 1000 vivos al comienzo de este año, sería, por proporción, 135'3 muertes entre los 1017'1 vivos al comienzo de ese año en una situación libre de virue-

la, quedando 881'8 vivos al final del segundo año; y así para el resto de edades.

Los resultados son recogidos en la Tabla 2, donde se comparan las columnas de supervivientes en el estado natural (esto es, con muertos de viruela) y en el estado no varioloso.

Tabla 2.

Edad por Años	Estado natural y varioloso	Estado no varioloso	Diferencia o ganancia	Edad por Años	Estado natural y varioloso	Estado no varioloso	Diferencia o ganancia
0	1300	1300	0	13	640	741'1	74'1
1	1000	1017'1	17'1	14	634	709'7	75'7
2	855	881'8	26'8	15	628	705'0	77'0
3	798	833'3	35'3	16	622	700'1	78'1
4	760	802'0	42'0	17	616	695'0	79'0
5	732	779'8	47'8	18	610	689'6	79'6
6	710	762'8	52'8	19	604	684'0	80'0
7	692	749'1	57'2	20	598	678'2	80'2
8	680	740'9	60'9	21	592	672'3	80'3
9	670	734'4	64'4	22	586	666'3	80'3
10	661	728'4	67'4	23	579	659'0	80'0
11	653	722'9	69'9	24	572	651'7	79'7
12	646	718'2	72'2	25	565	644'3	79'3

Esta Tabla hace ver de un vistazo, cuántos de 1300 niños, supuestos nacidos al mismo tiempo, quedarían vivos de año en año hasta la edad de veinticinco años, suponiéndoles todos sujetos a la viruela; y cuántos quedarían si estuviesen todos exentos de esta enfermedad, con la comparación y diferencia de los dos estados (Traducción del texto en francés que el autor escribió al pie de esta tabla).

Al construir esta segunda tabla, Bernoulli descuida el hecho de que algunos de estos supervivientes podrían sucumbir en ese año de otras enfermedades, algo que Duvillard (1806) rectificará.

Sin emplear la expresión “esperanza de vida”, el autor calcula que la vida media para un recién nacido, en el estado no varioloso, sería de 29 años y 9 meses (contra 26 años y 7 meses en el estado varioloso), o sea, una ganancia de 3 años y 1 mes.

A continuación, Bernoulli plantea el riesgo de la inoculación. Inicialmente, plantea dicho riesgo como de 1 sobre N (1 fallecido debido a la inoculación por cada N inoculados). Por lo tanto, la generación inicial ha de ser disminuida en la proporción de N a $N - 1$. Comenta que no hay acuerdo en cuánto debe ser N . Opina que en el peor de los casos $N = 200$ y, entonces, bajo ese supuesto calcula que el riesgo de la inoculación supone una disminución inferior a dos meses de la vida media calculada para el estado

no varioloso. Por tanto, la inoculación, con el riesgo añadido, supone una ganancia en la vida media de 3 años, sobre una media inicial de 26 años y 7 meses en el estado natural o varioloso, o sea, $\frac{1}{9}$ de esa media.

En este contexto, Bernoulli se plantea cuál debería ser N para que la inoculación no alterase la vida media del estado natural. El cálculo le lleva a $N = 9'43$. Entonces, añade que si la inoculación se lleva menos de 100 sobre 943 hará más bien que mal a la humanidad, sobre todo si es practicada en los más jóvenes, pues entonces “la pérdida sólo caería en los niños inútiles para la sociedad, y... toda la ganancia recaería sobre esta edad que es la más preciosa” (edad adulta). D. Bernoulli se anticipa aquí a los estudios de Quételet, tendientes a medir el coste, para la sociedad, de la mortalidad de los jóvenes clasificados por edad.

Sólo después de haber preparado su Tabla 2, Bernoulli se da cuenta que era posible obtener una fórmula que relacionase los supervivientes de las dos tablas. Como había expuesto antes, el número las muertes en el período de tiempo dx por causas distintas a la viruela es $-dy - \frac{sdx}{nm}$ con respecto a una población de y individuos (supervivientes en el estado natural). Por tanto, para una población de z (supervivientes en el estado no varioloso) podemos

escribir

$$-dz = -\frac{z}{y} \left(dy + \frac{sdx}{nm} \right)$$

O bien,

$$\frac{dz}{z} - \frac{dy}{y} = \frac{sdx}{nmy}.$$

Sustituyendo (3.1) para un s dado

$$\frac{dz}{z} - \frac{dy}{y} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{(m-1)e^{\frac{x}{n}}}{1 + (m-1)e^{\frac{x}{n}}} \right) dx.$$

Integrando obtenemos

$$\ln \frac{z}{y} = \frac{x}{n} - \ln \left(1 + (m-1)e^{\frac{x}{n}} \right) dx + c$$

Dado que $y = z$ cuando $x = 0$, entonces $c = \ln m$, de donde se deduce

$$z = \frac{me^{\frac{x}{n}}}{1 + (m-1)e^{\frac{x}{n}}} y \tag{3.2}$$

Bernoulli da sólo dos comparaciones numéricas de z por su método aproximado para construir la Tabla 2 y por la fórmula exacta (3.2); estos son:

Tabla 3.

Edad (x)	Valores de z Número de supervivientes en estado no varioloso para cada edad	
	Aproximado (Tabla 2)	Exacto (Fórmula exacta)
16	700'1	697'4
24	651'7	649'2

Tras considerar los dos ejemplos comenta el acuerdo razonable entre su método aproximado y su fórmula exacta. En cada caso el valor exacto es menor que el aproximado, lo cual es de esperar ya que, como se ha dicho, el principal defecto del método aproximado de Bernoulli es que no tiene en cuenta las muertes por otras causas que tendrían lugar entre los muertos de viruela salvados en cada año en particular. Desde un punto de vista más matemático podemos entender la Tabla 2 como una forma discreta de mostrar la supervivencia, mientras que la Fórmula 2 nos da una aproximación continua del mismo asunto, y la corrección que introduce la continuidad hace disminuir un poco el número propuesto como aproximado.

4. Una decisión útil

Aunque no disimula que él cree personalmente que la inoculación es “muy útil”, el autor declara que su intención es únicamente arrojar sobre la cuestión “alguna luz”, con el fin de que se juzgue “con todo el conocimiento de causa posible”.

Concibe que el problema se plantea de forma diferente a los particulares y a los Estados. En cualquier caso, la decisión está por tomar: ¿Inoculación o no inoculación? El fundamento de esta decisión es enunciado por D. Bernoulli de manera perfectamente clara: “en tanto que se quiera adoptar *el principio de la mayor utilidad* de toda la humanidad. . .”

Además del cálculo de la esperanza de vida de un recién nacido en los dos estados, Bernoulli se encarga de introducir una serie de conclusiones basadas en los cálculos que realiza usando como soporte la dos tablas construidas, de manera que la toma de la decisión adecuada no deje lugar a dudas. Así, introduce el concepto de “ganancia relativa” para cada edad, cociente entre la ganancia absoluta expresada por la cuarta columna de la 2ª tabla y el número de supervivientes en el estado varioloso a esa edad. Demuestra que si todos los recién nacidos son protegidos de la viruela desde el nacimiento, la “ganancia relativa” en vidas humanas que resultaría de la erradicación de esta causa de mortalidad, crecería de año en año, llegando a 1/7 de la generación en el momento en que ésta alcance su 17º año, que Daniel Bernoulli llama su “nacimiento civil”, y concluye que la proporción asintótica de “ganancia sobre los vivos” es, en general, igual a $\frac{1}{m-1}$. También, que la proporción de “vivos en estado natural/vivos en estado no varioloso” se estabiliza con la edad, quedando en $\frac{m-1}{m}$.

Un segundo dato que destacamos de entre la gran cantidad de cálculos que aporta el autor es el que sigue. En el estado natural toda una generación queda reducida a la mitad cuando han cumplido 11 años y 5 meses, mientras que en el estado no varioloso esto ocurre a la edad de 24 años y 3 meses.

Un tercer argumento es el cálculo de las esperanzas de vida de un niño de 5 años si no es inoculado y si lo es y obtiene para las mismas la proporción de 17 a 19.

La conclusión no da lugar a equívoco: aunque la inoculación sea costosa en vidas humanas, “el interés público” es practicarla, y hacerla lo más pronto

posible, en cualquier caso, antes de cumplir los 5 años, pues a esa edad la viruela ya se ha llevado la mitad de aquellos que haría morir. “Será siempre geoméricamente cierto que el interés de los Príncipes es favorecer y proteger la inoculación...” El mejor partido es el que da mayor vida media, porque la colectividad tiene la ventaja de que los individuos acceden a una edad donde acaban siendo productivos.

Para las circunstancias particulares de un individuo, Bernoulli indica que habría que hacer cálculos particulares para conocer el partido más ventajoso. Imaginemos una persona que llega a los veinte años sin haber tenido la viruela. La sociedad no tiene casi ningún interés en hacerla inocular a una edad donde la viruela ya se ha llevado el 95 % de su tributo. La persona, por el contrario, “llegada a la edad de la razón”, está en situación de sopesar la ganancia esperada de la inoculación, respecto al riesgo que debería pagarle, y ver dónde está su ventaja. Se trata, una vez más, de elegir una solución que maximiza una esperanza matemática.

Este párrafo es bastante esclarecedor para la resolución del problema de decisión: “*Todo hombre que no ha tenido la viruela se encuentra en la agobiante necesidad de jugar durante cada año de su vida con otros 63 a cuál debe morir de esta enfermedad, y con otros 7, a cuál debe cogerla, y lleva con él esta triste suerte hasta que coge la enfermedad. ¿No es mejor, suponiendo que la inoculación quita 1 de 473, jugar contra 472 en lugar de con 63, y no tener que sufrir la suerte más que una sola vez, en lugar de que le vuelva cada año de su vida? ¿Un hombre avisado puede titubear sobre la elección? Sin embargo, esta alternativa es exactamente la de esperar la viruela natural o hacerse inocular.*”

Referencias

- [1] BERNOULLI, D. (1760). Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité cause par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir., *Memoires de mathématiques et de physiques tires des registres de l'Academie Royale des Sciences, de l'année 1760; Hist. de l'Academie*, Paris, 1766 , 1-45.
- [2] DAW, R. H. (1979). Smallpox and the Double Decrement Table. A piece of Actuarial Pre-History. *JIA*, **106**, 299-318.
- [3] D'ALEMBERT, J. DE R. (1761). Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole. *Opuscules Mathématiques*, **2**, 26-95.
- [4] DUVILLARD, E. E. (1806). Nombre del artículo. *Analyse et Tableaux de l'influence de la petite vérole à chaque age, et de celle qu'un preservative tel que la vaccine peut avoir sur population et la longévité*, (París) (A. S.)
- [5] FAGOT-LARGEAULT, A., (1989). *Las causas de la mort. Histoire naturelle et facteurs de risque*, Institut Interdisciplinaire d'Etudes Epistémologiques. París.
- [6] HALLEY, E. (1693). An estimate of the degrees of the Mortality of mankind, drawn from curious Tables of the births and funerals at the City of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of Annuities upon lives. *Philosophical Transactions*, **XVII**, 596-610, 654-656.
- [7] JENNER, E. (1798). *An Inquiry into the Causes and Effects of the Variolae Vaccine, a Disease discovered in some of the Western Counties of England, particularly Gloucestershire, and know by the Name of the Cow Pox*, Sampson Low, London.
- [8] SÜSSMILCH, J. P. ,(1741). *Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen*, Berlin. Existe una versión en francés de 1998, traducida y anotada por J. M. Rohrbasser, y publicada por l'Institut National d'Études Démographiques.
- [9] TREMBLEY, J. (1799). Recherches sur la mortalité de la petite vérole. *Mém. De l'Acad. Roy. Des Sciences pour 1796*, 17-38. Berlin.

5. OPINIONES SOBRE LA PROFESIÓN

NECROLÓGICA: SIXTO RÍOS GARCÍA

Francisco Javier Girón González-Torre*

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Málaga



Pocos días después del fallecimiento de D. Sixto Ríos, el actual presidente de la SEIO se puso en contacto conmigo para que preparara una breve nota necrológica dedicada al que fuera nuestro ilustre presidente de honor a fin de incluirla en el Boletín de la Sociedad del mes de octubre. Acepté su ofrecimiento por muchas razones —profesionales y personales—, aunque estoy seguro de que muchos de sus discípulos directos podrían haberlo hecho probablemente mejor que yo. Mi intención en esta nota es, sobre todo, mostrar a las nuevas generaciones una parte —que creo importante— de la historia de la estadística de nuestro país que ellos, por su juventud, puede que no conozcan.

El pasado 8 de julio falleció el prof. Sixto Ríos García a los 95 años de edad, tras una dilatada y fructífera trayectoria científica que le sitúa entre los grandes matemáticos españoles del siglo XX. En esta ocasión no se nos ha ido, a diferencia de otros fallecimientos recientes —al menos para los estadísticos de mi generación— ni un compañero ni un amigo sino un *maestro*; en mi caso particular —que seguramente será compartido por muchos colegas míos—, me atrevería a decir algo más: me he

sentido huérfano por la pérdida del que siempre he considerado mi padre científico.

La enumeración de sus méritos, distinciones y premios me llevaría más espacio de lo que sería razonable en esta breve nota, por lo que me centraré en reseñar *la misión* que el prof. Sixto Ríos se impuso de convertir —en un período de poco más de cincuenta años— la estadística matemática y la investigación operativa en disciplinas que hoy gozan de una espléndida salud, comparable a cualquier otra rama del saber en nuestro país.

Aunque su formación fue la de un analista matemático por la influencia de su maestro Julio Rey Pastor, el azar lo llevó a ser el segundo catedrático de Estadística de nuestro país en la Universidad Central. El azar, que en esta ocasión fue el fallecimiento inesperado del primer catedrático de Estadística de nuestro país, D. Olegario Fernández Baños en 1946, cambió la trayectoria científica de D. Sixto que le hizo pasar del análisis matemático a la estadística. El paso del tiempo demostró que esta decisión fue muy acertada para el futuro en España de la estadística, disciplina que tras la segunda guerra mundial se estaba consolidando sobre todo en el mundo anglosajón, y de la investigación operativa, nacida tras la contienda mundial en los Estados Unidos de América.

Tras tomar posesión de la cátedra de Estadística Matemática en 1948, su primer objetivo fue impulsar la estadística desde varios frentes, no sólo como una disciplina científica rigurosa o como una disciplina aplicada a las ciencias sociales de la época como la economía, la sociología o a otras como la biología y la medicina, sino también a la incipiente industria de nuestro país, incluyendo una novedad importante en la época, que fue la de la consultoría.

Para ello en 1950 se crea, a instancia suya, el *Instituto de Investigación Operativa y Estadística*,

*Corresponding Author. E-mail: fj_giron@uma.es

dependiente del CSIC. La creación del Instituto tenía como objetivos no solamente la investigación en las dos áreas sino el desarrollo de un servicio de consultoría destinado a las empresas que podrían beneficiarse de las aplicaciones de las dos disciplinas.

En ese mismo año, como vehículo o escaparate de la actividad científica que se estaba desarrollando en el Instituto y con la colaboración de prestigiosos estadísticos como A. N. Kolmogorov, M. Fréchet, H. Cramer y H. Wold, el prof. Sixto Ríos crea la revista *Trabajos de Estadística e Investigación Operativa*, de la que fue director durante muchos años y que gracias a su tesón y al de sus discípulos y sucesores se transformó a finales del pasado siglo XX en dos revistas independientes, *TEST* y *TOP* de reconocido prestigio mundial en las áreas de la Estadística y de la Investigación Operativa, respectivamente.

La actual *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO)* fue creada en 1962 a iniciativa del prof. Sixto Ríos y de un grupo de profesores del *Instituto de Investigación Operativa y Estadística*, dependiente del CSIC, doce años después de la creación de este Instituto y diez años después de la creación de la *Escuela de Estadística de la Universidad Complutense de Madrid*, esta última creada como recompensa académica a sus esfuerzos y desvelos encaminados a la mejora de la enseñanza de la Estadística en nuestro país. Como consecuencia de ser el principal promotor e impulsor de su creación, fue elegido primer presidente de la SEIO.

Como prueba de su inquietud y de la capacidad para estar al día en lo referente a los desarrollos recientes de la estadística y la investigación operativa —en una época en la que el acceso a las fuentes bibliográficas de fuera de nuestro país era una aventura casi imposible—, quisiera recordar aquí que en el acto de apertura de la *Escuela de Estadística*, el 10 de octubre de 1952, el discurso del prof. Sixto Ríos versó sobre un tema novedoso en la España de aquellos tiempos, a saber *Nuevas aplicaciones de la Estadística: La Investigación Operacional*.

En el trienio 1961–1963, de gran actividad científica y administrativa, además de la creación de la *Escuela de Estadística* y de la SEIO, el prof. Sixto Ríos ingresó en la *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* en 1961 y publicó la tercera edición de su libro de texto más conocido e importante: *Métodos Estadísticos*, una ampliación y

puesta al día de su libro anterior *Introducción a los Métodos de la Estadística*, probablemente la obra que más ha contribuido a la enseñanza de la estadística en nuestro país a lo largo de algo más de una generación. No olvidemos que, salvo la excepción del famoso libro de Harald Cramér *Métodos Matemáticos de la Estadística* traducido al español por el prof. Enrique Cansado, uno de los primeros discípulos del prof. Sixto Ríos, apenas había más libros de Estadística Matemática que el suyo en el mercado hispanohablante.

A instancias del prof. Sixto Ríos se crea, en 1973, la *Sección de Estadística e Investigación Operativa de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid* y el Departamento universitario del mismo nombre, que fue el origen de los futuros departamentos de estadística de las incipientes universidades españolas que surgieron a lo largo de todo el territorio nacional a partir de esas fechas de expansión universitaria. La creación de la *Sección de Estadística e Investigación Operativa* tuvo como consecuencia inmediata la de crear una especialidad dentro de la carrera de matemáticas que, por otra parte, desde su creación, siempre ha atraído a muchos alumnos de la carrera de matemáticas. Poco después, la especialidad se exportó a todas las universidades en las que había Facultades de Ciencias o de Matemáticas, gracias a lo cual la estadística y la investigación operativa experimentaron un crecimiento espectacular, mayor que el resto de las especialidades de la carrera de matemáticas.

Antes de esa época de expansión, la *estadística*, comparada con el resto de las otras ramas tradicionales de la matemática, era una disciplina mucho más reciente aún en proceso de consolidación; no obstante, el prof. Ríos, siguiendo sobre todo la tónica de los países anglosajones, la convirtió en nuestro país —junto con la *investigación operativa*, que emergió después de la segunda guerra mundial según ya hemos comentado— en una disciplina moderna y rigurosa. Por otra parte, D. Sixto, como se le conocía en el mundo académico, siempre tuvo una finísima intuición y fue un adelantado a su tiempo, al percatarse de que estas disciplinas emergentes eran herramientas útiles para abordar y resolver problemas reales complejos que iban surgiendo en los ámbitos económico, industrial, etc.; posteriormente, se interesó por la teoría de la toma de decisiones racionales, disciplina en la que fue

pionero en nuestro país y que cultivó hasta el final de su dilatada carrera académica.

A propósito de la *Teoría de la Decisión*, quisiera recordar que D. Sixto ingresó en la *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* el 21 de junio de 1961 de la mano de D. Julio Rey Pastor, su director de tesis, maestro y mentor y uno de los más destacados matemáticos españoles del siglo pasado, quien contestó a su discurso de ingreso, que precisamente versaba sobre los *Procesos de Decisión*, otra de las nuevas disciplinas surgidas inmediatamente tras finalizar la segunda guerra mundial, casi al mismo tiempo que otras relacionadas con ella como la *Teoría de los juegos* o la *Teoría de la utilidad* desarrolladas por John von Neumann y Oscar Morgenstern.

D. Sixto tuvo el acierto de incorporar éstas y otras nuevas disciplinas a los planes de estudio de la especialidad de Estadística e Investigación Operativa de la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense de Madrid, lo que permitió modernizar los estudios de ambas ramas y situarlos a un nivel comparable al de muchas de las Universidades más prestigiosas del mundo. Vista en perspectiva, su labor en pro de la estadística y la investigación operativa se nos antoja la tarea titánica de una persona excepcional de gran inteligencia, tesón, capacidad de trabajo y amplias miras.

No quisiera terminar esta nota sin hablar de su vertiente humana, dejando ya de lado la científica que acabamos de resumir. Si es difícil hacerlo de un compañero, cuánto más lo es de una persona de la generación anterior, que ha sido mi maestro y el de muchos de mi generación.

A pesar de que, en apariencia, D. Sixto daba la impresión de ser una persona muy distante, impre-

sión seguramente motivada por la diferencia de edad con sus discípulos, al menos de los de mi generación, por su timidez y por su condición de catedrático de la época, tan diferente de la actual, siempre estuvo muy interesado y preocupado por el presente y el futuro académico y profesional de sus discípulos más directos. Tenía por costumbre supervisar, con cierta periodicidad, los progresos que hacían sus doctorandos, proporcionándoles bibliografía reciente sobre los temas de investigación; fue capaz de conseguir algunas de las escasas becas y proyectos de investigación que, en aquella época de los comienzos de la expansión universitaria eran más bien una rareza; también les animaba a opositar a las vacantes o plazas de profesor de nueva creación que, en ese período, empezaban a proliferar en las universidades españolas.

Por el hecho de ser el de la Universidad Complutense de Madrid el primer departamento de estadística e investigación operativa del país, de allí salieron muchos de los catedráticos de otras universidades. A pesar de la pérdida del capital humano y científico que suponía para el departamento de la Complutense, D. Sixto siempre prefirió la promoción académica de sus discípulos en otras universidades a que permaneciesen en su departamento cuando en él no había dotación de plazas, lo que suponía un rasgo de generosidad por su parte.

Las dos generaciones de sus discípulos directos, y los que vienen detrás de ellos, le debemos mucho de lo que ahora somos; de modo que no es exagerado afirmar, como ya lo han hecho otros muchos, que D. Sixto Ríos puede considerarse, sin duda, como el padre de la estadística y de la investigación operativa de nuestro país.

Descanse en paz.

CPLEX 10 = FAST + SMART

CPLEX 11 = 10 X
FASTER* + SMARTER

YOU DO THE MATHS!

ILOG CPLEX 11

Performance like nothing before

Breakthrough MIP Performance:

*Take advantage of improved time to optimality, which is achieved on average 10 times faster on problems taking more than five minutes with CPLEX 10.

Enhanced Parallel MIP:

Leverage your multi-core machine and the new deterministic parallel MIP mode to get repeatable invariant solution paths.

Multiple MIP Solutions:

Generate and store multiple solutions to a MIP model, allowing you to consider subjective preferences on solutions.

Performance Tuning:

Get better performance from CPLEX and improve the performance of your optimization applications with the new performance tuning utility.

Learn more at: <http://cplex.ilog.com>

